B, juin 2010

Mathématiques 2 (Corrigé modèle)

I. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{-1+\ln x} & \text{si } x > 0 \\ e^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1) $\ln x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq e$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{e\}$

Continuité en 0 : $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\overbrace{x}^{\to 0}}{\underbrace{-1+\underbrace{\ln x}_{\to -\infty}}_{\to -\infty}} = 0$ =

La fonction f est continue en 0.

Dérivabilité en 0 :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\ln x - 1} = \text{"}\dfrac{1}{-\infty}\text{"} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x - x - 1}{x}$ f.i. $\dfrac{0}{0}$

$\underset{(H)}{=} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x - 1}{1} = 0$

La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\underbrace{e^x}_{\to 0} - \underbrace{x}_{\to -\infty} - 1) = +\infty$ pas d'A.H. à gauche

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - x - 1}{x} \underset{(H)}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 1}{1} = -1$

f.i. $\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1) = -1$

Ou

$f(x) = \underbrace{-x-1} + \underbrace{e^x}_{\substack{\varphi(x) \\ \to 0 \\ \text{si } x \to -\infty}}$

A.O. à gauche : $y = -x - 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x - 1} \underset{(H)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty$ pas d'A.H. à droite

f.i. $\dfrac{\infty}{\infty}$

2

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-1+\ln x} = 0$$ pas d'A.O. à droite

$$\lim_{x\to e^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to e^{\pm}} \frac{x}{-1+\ln x} = \pm\infty$$ A.V. $x = e$

3) $\underline{x<0}$ $f'(x) = e^x - 1 < 0$ (pour $x<0$)

$\underline{x>0}$ $f'(x) = \dfrac{-1+\ln x - 1}{(-1+\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 2}{(\ln x - 1)^2}$

$f'(x) = 0 \iff \ln x = 2 \iff x = e^2$

$f'(x) \underset{<}{>} 0 \iff x \underset{<}{>} e^2$

Tableau des variations :

x	$-\infty$		0		e		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	e^2 min	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(e^2) = \frac{e^2}{-1+2} = e^2$$

4) $x<0$: $f''(x) = e^x > 0$

$x>0$: $f''(x) = \dfrac{(\ln x - 1)^2 \cdot \frac{1}{x} - (\ln x - 2)\cdot 2\cdot(\ln x - 1)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^4}$

$$= \frac{\ln x - 1 - 2\ln x + 4}{x\cdot(\ln x - 1)^3} = \frac{3 - \ln x}{x(\ln x - 1)^3}$$

$f''(x) = 0 \iff x = e^3$ (>0)

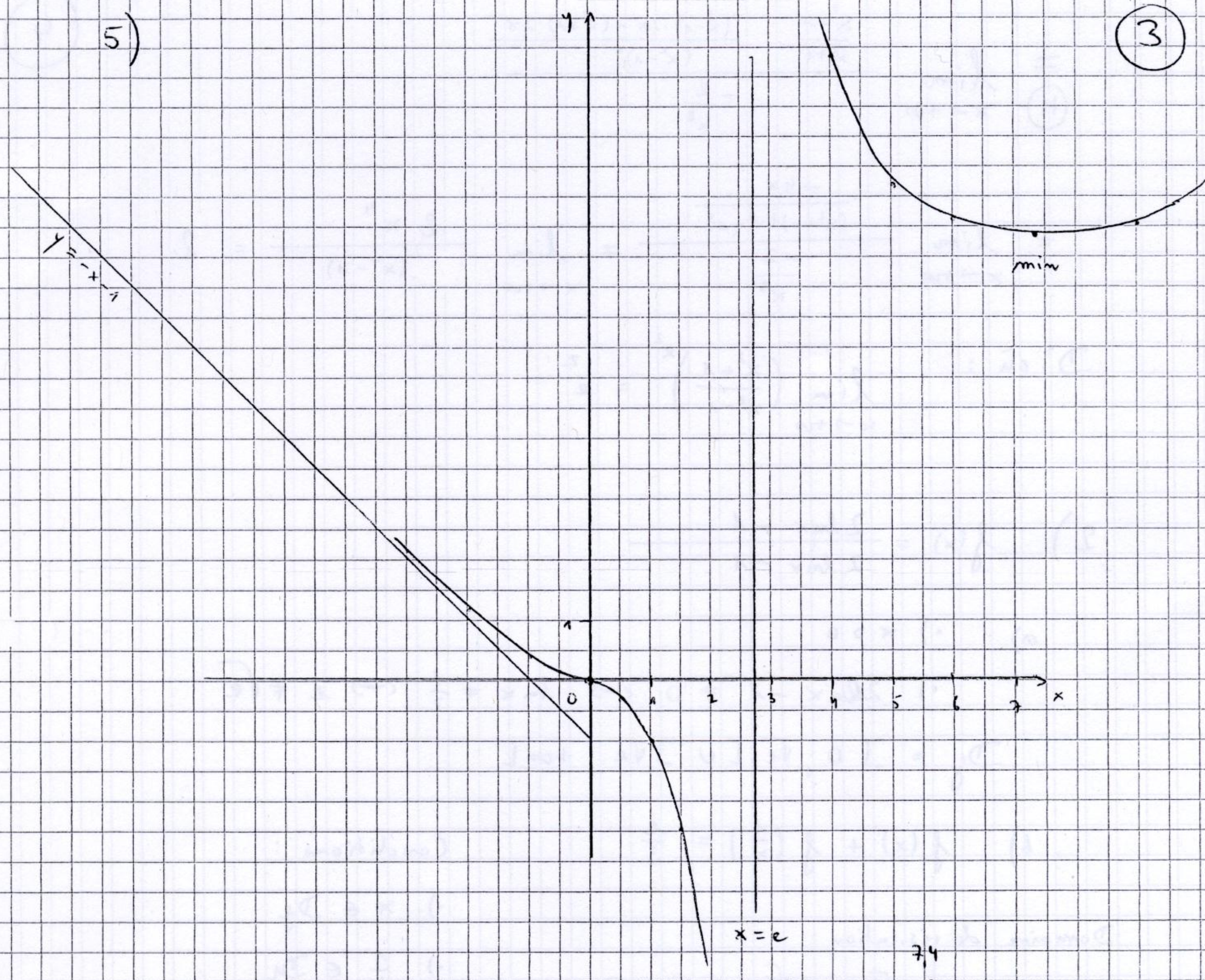
x	$-\infty$		0		e		e^3	
f''		$+$	$\|^{(*)}$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$
f		$\cup$	0	$\cap$	$\|$	$\cup$		$\cap$

(*) on peut le vérifier (à titre facultatif)

$$f(e^3) = \frac{e^3}{-1+3} = \frac{1}{2}e^3$$

deux points d'inflexion : $I_1\,(0\,;0)$ $I_2\left(e^3\,;\frac{e^3}{2}\right)$

5)



x	0,5	1	1,5	2	3,5	4	5	6	e^2 (7,4)	8	9
$f(x)$	-0,3	-1	-2,5	-6,5	13,8	10,4	8,2	7,6	e^2	7,41	7,5

x	0	-0,5	-1	-2	-3
$f(x)$	0	0,1	0,4	1,1	2,05

II 1) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{x \to +\infty} e^{x^2 \cdot \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}$$

Calcul à part:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\underbrace{x^2}_{\infty} \cdot \underbrace{\ln\left(\underbrace{\frac{x^2+1}{x^2-1}}_{1}\right)}_{0}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{x^{-2}}$$

f.i. $\infty \cdot 0$

$$\underset{(H)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{(x^2-1)\cdot 2x - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}}{-\frac{2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-4x}{(x^2+1)(x^2-1)}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^4}{(x^4-1)} = 2$$

D'où :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2} = e^2$$

2) $f(x) = \dfrac{2 \ln x + 1}{2 \ln x - 1}$

a) ·) $x > 0$

·) $2 \ln x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \ln x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow e \neq \sqrt{e}$

$D_f =]0 ; \sqrt{e}[\cup]\sqrt{e} ; +\infty[$

b) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{10}{3}$

Conditions :

·) $x \in D_f$

·) $\frac{1}{x} \in D_f$

$\frac{1}{x} = \sqrt{e}$

$x \neq \frac{\sqrt{e}}{e}$

Domaine de résolution :

$D =]0 ; \frac{\sqrt{e}}{e}[\cup]\frac{\sqrt{e}}{e} ; \sqrt{e}[\cup]\sqrt{e} ; +\infty[$

L'équation s'écrit :

$$\frac{2 \ln x + 1}{2 \ln x - 1} + \frac{-2 \ln x + 1}{-2 \ln x - 1} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{2 \ln x + 1}{2 \ln x - 1} + \frac{2 \ln x - 1}{2 \ln x + 1} = \frac{10}{3} \quad \Big| \cdot (2 \ln x - 1)(2 \ln x + 1) \cdot 3$$

$$3 \cdot (2 \ln x + 1)^2 + 3 \cdot (2 \ln x - 1)^2 = 10 \cdot (4 \ln^2 x - 1)$$

$$3 \cdot \left(4 \ln^2 x \underbrace{+ 4 \ln x} + 1 + 4 \ln^2 x \underbrace{- 4 \ln x} + 1\right) = 10 \left(4 \ln^2 x - 1\right)$$

$$24 \ln^2 x + 6 = 40 \ln^2 x - 10$$

$$16 \ln^2 x = 16 \qquad \ln^2 x = 1$$

$\ln x = \pm 1 \qquad x = e \in D$ ou $x = \frac{1}{e} \in D \qquad S = \left\{ \frac{1}{e} ; e \right\}$

3) $0{,}5^x \cdot \ln x - 0{,}5^x - \ln x + 1 \leq 0 \qquad D =]0;+\infty[$

$0{,}5^x \cdot (\ln x - 1) - (\ln x - 1) \leq 0$

$(\ln x - 1) \cdot (0{,}5^x - 1) \leq 0$

$\ln x - 1 \overset{=}{\underset{<}{>}} 0 \iff \ln x \overset{=}{\underset{<}{>}} 1 \iff x \overset{=}{\underset{<}{>}} e$

$0{,}5^x - 1 \overset{>}{\underset{<}{=}} 0 \iff 0{,}5^x \overset{>}{\underset{<}{=}} 1 \overset{\text{base} < 1}{\iff} x \overset{<}{\underset{>}{=}} 0$

Tableau de signes :

x	0		e		$+\infty$
$\ln x - 1$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$0{,}5^x - 1$	0	$-$		$-$	
Produit	$\|\|$	$+$	0	$-$	

$S = [e;+\infty[$

III 1) $F(x) = \int \frac{1}{\sin x}\,dx$ sur $]0;\pi[$

$\sin x = \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$

$= \int \frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \tan \frac{x}{2}}\,dx$

poser $t = \tan \frac{x}{2}$

$\frac{x}{2} = \text{Arctan}\, t$

$x = 2 \cdot \text{Arctan}\, t$

$\frac{dx}{dt} = 2 \cdot \frac{1}{1+t^2}$

$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$= \int \frac{1+t^2}{2 \cdot t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$= \int \frac{1}{t}\,dt$

$= \ln |t| + k$

$= \ln \left| \underbrace{\tan \frac{x}{2}}_{>0 \text{ pour } x \in]0;\pi[} \right| + k$

$F(x) = \ln \left(\tan \frac{x}{2}\right) + k$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \iff \ln \left(\underbrace{\tan \frac{\pi}{4}}_{1}\right) + k = 0$

$\iff k = 0$

d'où :

$F(x) = \ln \left(\tan \frac{x}{2}\right)$

6

2) $f(x) = (x+1)\cdot e^{-|x|}$ $\quad f(-1)=0 \quad f(0)=1$

$f(x)>0$ pour $x>-1$

$$A(\lambda) = \int_{-1}^{\lambda} f(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{0} (x+1)e^{x}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{\lambda} (x+1)e^{-x}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_{-1}^{0} (x+1)e^{x}\,dx$$ i.p.p. $\quad f(x)=x+1 \quad g'(x)=e^{x}$

$f'(x)=1 \quad g(x)=e^{x}$

$$= \left[(x+1)e^{x}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^{x}\,dx$$

$$= 1 - \left[e^{x}\right]_{-1}^{0} = 1-(1-e^{-1}) = \frac{1}{e}$$

$$I_2 = \int_{0}^{\lambda} (x+1)e^{-x}\,dx$$ ipp $\quad f(x)=x+1 \quad g'(x)=e^{-x}$

$f'(x)=1 \quad g(x)=-e^{-x}$

$$= \left[-(x+1)e^{-x}\right]_{0}^{\lambda} + \int_{0}^{\lambda} e^{-x}\,dx$$

$$= -(\lambda+1)e^{-\lambda} + 1 + \left[-e^{-x}\right]_{0}^{\lambda}$$

$$= -(\lambda+1)e^{-\lambda} + 1 + (-e^{-\lambda}+1)$$

$$A(\lambda) = I_1 + I_2 = 2 + \frac{1}{e} - e^{-\lambda}(\lambda+2)$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = 2 + \frac{1}{e}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda+2}{e^{\lambda}} \underset{(H)}{=} \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{e^{\lambda}} = 0$$

1. L'ordonnée de S est la différence entre les altitudes donc $3795 - 2310 = 1485$.
   La distance de 9,8 cm sur la carte topographique à l'échelle 1 :25000 vaut $9,8 \cdot 25000\,cm$ soit $2450\,m$, donc l'abscisse est 2450.
2. Encadrement de la longueur du câble.
   On obtient la longueur minimale entre la gare O et le sommet S par le théorème de Pythagore : $l_{min} = OS = \sqrt{2450^2 + 1485^2} \approx 2864,91\,m$ La longueur maximale du câble est la somme : $l_{max} = 2450 + 1485 = 3935\,m$

$$2864 < l < 3935$$

3. Dans un repère orthonormé d'origine O toute parabole $\mathcal{P}$ de sommet O a pour équation $y = ax^2$.
   La condition supplémentaire que $S \in \mathcal{P}$ se traduit par $a \cdot 2450^2 = 1485$ et donne la valeur $a = \frac{297}{1200500} \approx 0,000247$.
   Ainsi la fonction demandée est

$$f : [0, 2450] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow \frac{297}{1200500}x^2$$

4. Le calcul de la dérivée de f et l'application de la formule donne le résultat

$$l_f = \int_0^{2450} \sqrt{1 + \left(\frac{297x}{600250}\right)^2}\,dx \approx 2959,62\,m$$

   On remarque que cette longueur vérifie bien l'encadrement.
5. Soit $g(x) = a^{-1}\left(e^{ax-ab} + e^{ab-ax} + c\right)$ et $\mathcal{C}_g$ la courbe correspondante.
   Les trois conditions se traduisent par le système

$$\begin{cases} g(0) & = & 0 \\ g'(0) & = & 0 \\ g(2450) & = & 1485 \end{cases}$$

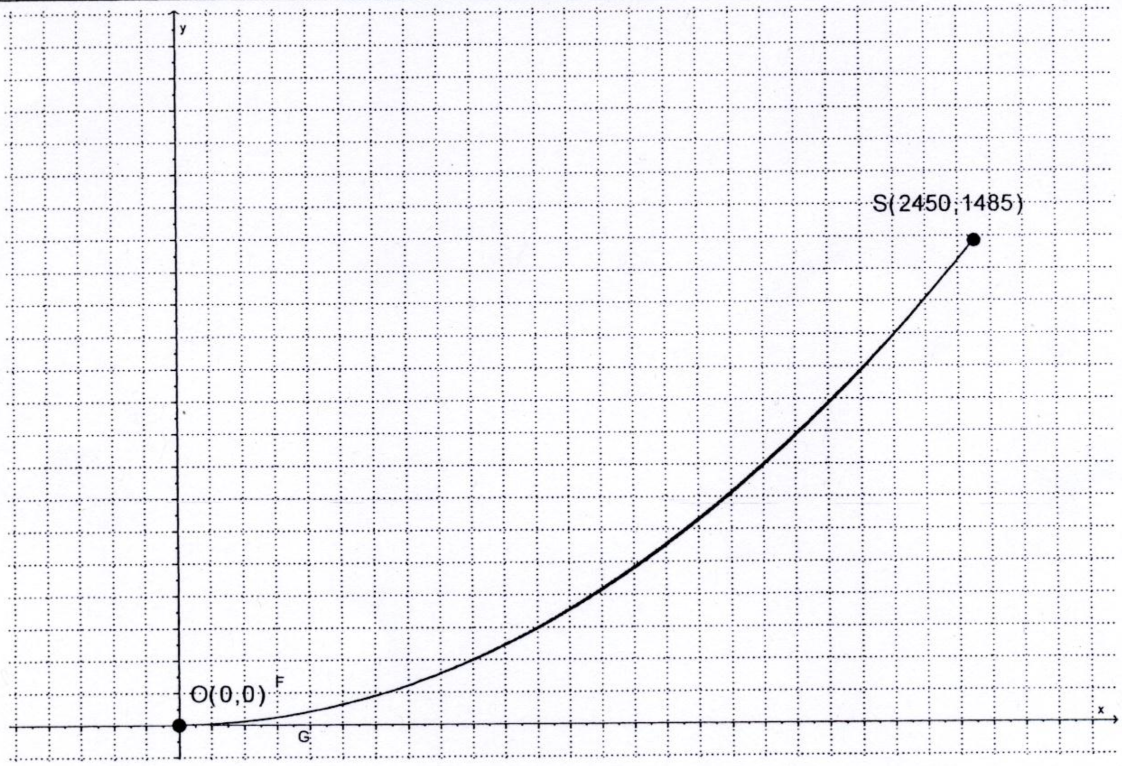
   qui donne les valeurs $a \approx 0,00024037$, $b = 0$ et $c = -2$ qui conviennent.
   Ainsi la fonction demandée est

$$g : [0, 2450] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow \frac{e^{0,00024x} + e^{-0,00024x} - 2}{0,00024}$$

6. Le calcul de la dérivée de g et l'application de la formule donne le résultat

$$l_g = \int_0^{2450} \sqrt{1 + (g'(x))^2}dx \approx 2963,26\,m$$

   On remarque de nouveau que cette longueur vérifie bien l'encadrement et diffère de peu de la longueur l_f.
7. Pour comparer les valeurs des deux fonctions on peut consulter le tableau des valeurs de la fonction $h = f - g$ et en prenant un pas convenable comme par exemple 50. On trouve un maximum d'éloignement pour $x \approx 1750$ d'environ 10,6 m.
8. Pour conclure disons que l'erreur commise en prenant la version parabole est minime et qu'on peut facilement pardonner cette erreur à Galilée. Heureusement l'inquisition ne l'a pas remarquée.


y
S(2450;1485)
O(0;0)
F
G
x

F1 F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

- $3795 - 2310$ 1485.
- $3795 - 2310$ 1485.
- $9.8 \cdot 25000$ 245000.
- $\dfrac{9.8 \cdot 25000}{100}$ 2450.
- $2450 + 1485$ 3935.
- $\sqrt{2450^2 + 1485^2}$ 2864.91273864

```
√(2450^2+1485^2)
MAIN    RAD APPROX    FUNC 23/30
```

F1 F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

- $a \cdot x^2 \to fa(x)$ Done
- solve(fa(2450) = 1485, a) $a = \dfrac{297}{1200500}$
- solve(fa(2450) = 1485, a) $a = 2.47396917951\mathrm{E}{-4}$
- $fa(x) \mid a = 2.4739691795085\mathrm{E}{-4} \to f(x)$ Done

```
MAIN    RAD APPROX    FUNC 10/13
```

F1 F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

Done

- $\frac{d}{dx}(f(x)) \to fp(x)$ Done
- $\displaystyle\int_0^{2450} \sqrt{1 + (fp(x))^2}\,dx$ 2959.61921214
- $\dfrac{e^{a \cdot x - a \cdot b} + e^{a \cdot b - a \cdot x} + c}{a} \to gabc(x)$ Done

```
MAIN    RAD APPROX    FUNC 7/13
```

F1 F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

- $\frac{d}{dx}(gabc(x)) \to dgabc(x)$ Done
- solve(gabc(0) = 0 and dgabc(0) = 0 and g▸
  a = 2.11535186997E-17 and b = 0 and c = ▸
- gabc(x) | a = 2.40369264251E-4 and b = 0 a▸
  Done
- $\frac{d}{dx}(g(x)) \to gp(x)$ Done

```
MAIN    RAD APPROX    FUNC 3/13
```

F1 F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clean Up

a = 2.11535186997E-17 and b = 0 and c = 1

- gabc(x) | a = 2.40369264251E-4 and b = 0 a▸
  Done
- $\frac{d}{dx}(g(x)) \to gp(x)$ Done
- $\displaystyle\int_0^{2450} \sqrt{1 + (gp(x))^2}\,dx$ 2963.26391749
- $f(x) - g(x) \to h(x)$ Done

```
MAIN    RAD APPROX    FUNC 13/30
```

F1 | F2 Setup | Cell | Header | Del Row | Ins Row

x	y1	y2	y3
1550.	594.37	584.2	10.173
1600.	633.34	622.97	10.369
1650.	673.54	663.03	10.51
1700.	714.98	704.39	10.59
1750.	757.65	747.05	10.604
1800.	801.57	791.02	10.544
1850.	846.72	836.31	10.406
1900.	893.1	882.92	10.182

```
x=1750.
MAIN    RAD APPROX    FUNC
```