Épreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2010	**Numéro d'ordre du candidat**
Section: B	______________________
Branche: Mathématiques 2	______________________

QUESTION 1 (4+4+5+4+3=20 points)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{-1+\ln x} & \text{si } x>0\\ e^x-x-1 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$$

1) Déterminez le domaine de définition de f.
   Étudiez la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2) Étudiez l'existence d'asymptotes à la courbe représentative de f.
3) Étudiez le sens de variation de f et dressez un tableau de variation.
4) Étudiez la concavité de la courbe représentative et déterminez les points d'inflexion éventuels.
5) Représentez f graphiquement dans un repère orthonormé du plan (unité : 1 *cm*).

QUESTION 2 (4+6+5=15 points)

1) Calculez la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$$

2) On considère la fonction :

$$f(x)=\frac{2\ln x+1}{2\ln x-1}.$$

   a) Déterminez le domaine de définition de f.
   b) Résolvez l'équation :

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{10}{3}$$

3) Résolvez l'inéquation :

$$0,5^x\cdot\ln x-0,5^x-\ln x+1\leq 0$$

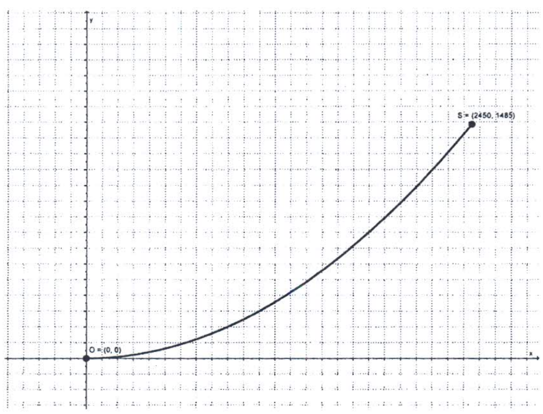
QUESTION 3 (5+5=10 points)

1) Déterminez la primitive de la fonction $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ qui s'annule pour $x=\dfrac{\pi}{2}$.
2) On considère la fonction $f(x)=(x+1)\cdot e^{-|x|}$. Calculez l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=\lambda$ avec $\lambda>0$. Calculez ensuite $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2010 **Section: B** **Branche: MATHEMATIQUES II**	**Numéro d'ordre du candidat:**

Problème Galileo Galilei pensa à tort que la chaînette était une parabole. La chaînette est la courbe que l'on peut admirer en tenant un collier ou une chaîne par ses extrémités ou en observant, de nos jours, les câbles électriques à haute tension suspendus entre deux puissants pylônes. Aujourd'hui on sait que cette courbe est décrite par une expression exponentielle. Quelle est l'importance de l'erreur commise en prenant une parabole au lieu de la courbe exacte ?
L'exemple suivant permettra de conclure.
Le câble d'un téléphérique relie la station gare O qui se trouve à une altitude de 2310 m à la station sommet S qui se trouve à une altitude de 3795 m. Sur une carte topographique à l'échelle 1 :25000 la distance horizontale entre O et S mesure 9,8 cm. Le câble sort de la station gare à l'horizontale. L'unité de longueur est le mètre.



1. Vérifier que dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le point S à pour coordonnée $(2450, 1485)$.
2. Soit l la longueur du câble. Déterminer deux réels l_{min} et l_{max} tels que
$$l_{min} < l < l_{max}$$
3. En supposant que le câble du téléphérique pend suivant la forme d'une parabole, déterminer une fonction f qui correspond à la courbe décrite par le câble du téléphérique qui relie la gare O au sommet S.
4. Calculer la longueur l_f du câble entre O et S pour la fonction f et vérifier $l_{min} < l_f < l_{max}$.
Indication : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$, alors la longueur de la partie du graphe de f allant de $A(a, f(a))$ vers $B(b, f(b))$ est donné par l'intégrale
$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$
5. Sachant qu'un câble suspendu en deux points fixes décrit une courbe C_g avec
$$g(x) = a^{-1}\left(e^{ax-ab} + e^{ab-ax} + c\right)$$
déterminer a, b et c pour que la fonction g corresponde à la courbe décrite par le câble entre O et S.
6. Calculer la longueur l_g du câble entre O et S pour la fonction g et vérifier $l_{min} < l_g < l_{max}$.
7. Etudier les variations de $f - g$.
8. Conclure en considérant la différence $l_g - l_f$ et en interprétant les variations de $f - g$.

(15)