Corrigé

I $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-4x}\cdot e^{x} & \text{si } x \leq 0 \\ -2x+1-\dfrac{x}{\ln x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) $\text{dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$

<u>continuité en 0 :</u>

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{1-4x}\cdot \underbrace{e^{x}}_{\to 0} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\underbrace{-2x+1}_{\to 1} - \frac{x}{\underbrace{\ln x}_{\to -\infty}} \right) = 1 \quad \left(\frac{x}{\ln x} \to 0\right)$$

ainsi $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$

et par conséquent f est continue en 0.

- $$\lim_{x\to -\infty} \underbrace{\sqrt{1-4x}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{e^{x}}_{\to 0} \quad f.i. \text{ "}\infty\cdot 0\text{"}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1-4x}}{e^{-x}} \begin{matrix}\to +\infty \\ \to +\infty\end{matrix} \quad f.i. \text{ "}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{+4}{2\underbrace{\sqrt{1-4x}}_{\to +\infty}\, \underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty}} = 0 \quad \underline{A.H.G. : y=0}$$

- $$\lim_{x\to +\infty} \left(\underbrace{-2x+1}_{\to -\infty} - \frac{\overset{\to +\infty}{x}}{\underbrace{\ln x}_{\to +\infty}} \right) = -\infty \quad \left(\frac{x}{\ln x} \to +\infty\right)$$

<u>pas d'A.H.D.</u>

en effet : $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(-2 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\to 0} \right)$$

$$= -2$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(f(x) + 2x \right) = \lim_{x\to +\infty} \left(1 - \underbrace{\frac{x}{\ln x}}_{\to +\infty} \right)$$

$$= -\infty$$

<u>pas d'A.O.D.</u>
<u>B.P. dans la direction</u>
<u>de la droite d'éq. $y=-2x$</u>

- $$\lim_{x\to 1^+} \left(\underbrace{-2x+1}_{\to -1} - \frac{\overset{\to 1}{x}}{\underbrace{\ln x}_{\to 0^+}} \right) = -\infty \quad \left(\frac{x}{\ln x} \to +\infty\right)$$

$$\lim_{x\to 1^-} \left(-2x+1 - \frac{x}{\ln x} \right) = +\infty$$

<u>A.V. : $x=1$</u>

2) $\forall x \in\,]-\infty ; 0[$,

$$f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{1-4x}}\cdot e^{x} + \sqrt{1-4x}\cdot e^{x}$$

$$= \frac{-2+(1-4x)}{\sqrt{1-4x}}\cdot e^{x} = \frac{-4x-1}{\sqrt{1-4x}}\cdot e^{x}$$

x		$-\frac{1}{4}$		0
$-4x-1$	+	0	−	

$\forall x \in\,]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = -2 - \frac{1\cdot \ln x - x\cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{-2\ln^2 x - \ln x + 1}{\ln^2 x}$$

$$-2\ln^2 x - \ln x + 1 = 0$$

posons : $y = \ln x$

$$-2y^2 - y + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9 \qquad y_1 = \frac{1+3}{-4} = -1$$

$$y_2 = \frac{1-3}{-4} = \frac{1}{2}$$

$\ln x = -1$ ou $\ln x = \frac{1}{2}$

$x = e^{-1}$ ou $x = \sqrt{e}$

$\approx 0{,}4$ $\qquad \approx 1{,}6$

x	0		e^{-1}		$\sqrt{e}$	
$-2\ln^2 x - \ln x + 1$	‖	−	0	+	0	−

<u>dérivabilité en 0 :</u>

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \left(-2 - \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\to 0} \right) = -2$$

donc f n'est pas dérivable en 0.

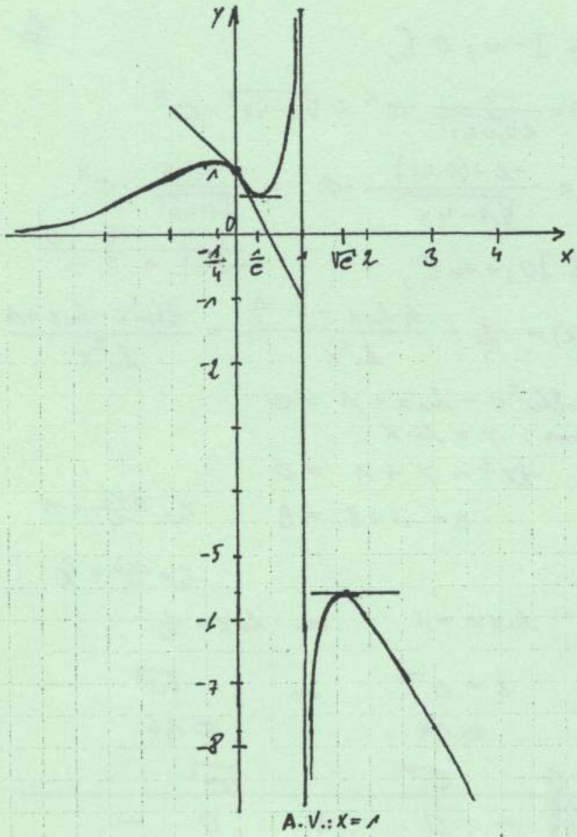
<u>tableau de variation :</u>

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		e^{-1} ($\approx 0{,}4$)		1		$\sqrt{e}$ ($\approx 1{,}6$)	
f'		+	0	−	−1 ‖ −2	−	0	+	‖	+	0	−
f	0	↗	1,1 MAX	↘	1	↘	MIN	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	−5,6 MAX	↘ $-\infty$

$$f\left(-\tfrac{1}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{4}} \approx 1{,}1$$

$$f\left(e^{-1}\right) \approx \frac{-2}{e} + 1 + \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}6$$

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) \approx -2\sqrt{e} + 1 - 2\sqrt{e} = 1 - 4\sqrt{e} \approx -5{,}6$$



x	-2	-1	3
$f(x)$	0,4	0,8	-7,7

3) Soit $a < 0$.

$$V(a) = \pi \cdot \int_a^0 \left[f(x)\right]^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_a^0 (1-4x)\, e^{2x}\, dx$$

par parties :

$u(x) = 1-4x \qquad v'(x) = e^{2x}$

$u'(x) = -4 \qquad v(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$V(a) = \pi \cdot \left[(1-4x)\cdot \frac{1}{2} e^{2x}\right]_a^0$$

$$- \pi \cdot \int_a^0 (-2)\, e^{2x}\, dx$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{2} - (1-4a)\cdot \frac{1}{2} e^{2a}\right]$$

$$+ \pi \cdot \left[e^{2x}\right]_a^0$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{2} - (1-4a)\cdot \frac{1}{2} e^{2a} + 1 - e^{2a}\right]$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2} - 2a\right) e^{2a}\right] \text{ u.v.}$$

$$\lim_{a \to -\infty} V(a)$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \pi \cdot \left[\frac{3}{2} - \underbrace{\frac{3}{2} e^{2a}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2a}{e^{-2a}}}_{\to 0}\right]$$

$$= \frac{3\pi}{2} \text{ u.v.} \quad \left(\text{en effet: } \lim \frac{2a}{e^{-2a}} \overset{H}{=} \lim_{a\to-\infty} \frac{2}{-2e^{-2a}} = 0\right)$$

II $f(x) = x\cdot(1+\ln^2 x)$

1) $\operatorname{dom} f =]0;+\infty[= \operatorname{dom}_c f = \operatorname{dom}_d f$

• $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0}\cdot\underbrace{(1+\ln^2 x)}_{\to+\infty} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\ln^2 x}{\frac{1}{x}}$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\ln x}{\frac{-1}{x}}$

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(+2x) = 0$

<u>pas d'A.V.</u>
<u>point-creux $O(0;0)$</u>

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{(1+\ln^2 x)}_{\to+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(1+\ln^2 x) = +\infty$

<u>pas d'A.O.D.</u>
<u>B.P. dans la dir.</u>
<u>de l'axe des y</u>

2) $\forall x \in]0;+\infty[$

$f'(x) = 1\cdot(1+\ln^2 x) + x\cdot(2\ln x)\frac{1}{x}$

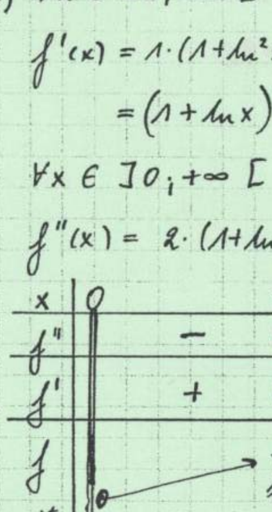
$= (1+\ln x)^2 \geq 0$

$\forall x \in]0;+\infty[$

$f''(x) = 2\cdot(1+\ln x)\cdot\frac{1}{x} = \dfrac{2(1+\ln x)}{x}$

x	0		$\frac{1}{e}\approx 0{,}4$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'		$+$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$ $\approx 0{,}7$	$\nearrow$	$+\infty$
concavité de G_f		$\frown$	P.I.	$\smile$	

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e}$



x	1	2
$f(x)$	1	$2{,}96$

3) Soit $a>0$.

Éq. de T_a : $y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$

T_a passe par $O(0;0)$

$\iff 0 - f(a) = f'(a)\cdot(0-a)$

$\iff f(a) = a\cdot f'(a)$

$\iff a\cdot(1+\ln^2 a) = a\cdot(1+\ln a)^2 \quad \Big|\cdot\frac{1}{a}$

$\iff 1+\ln^2 a = 1+2\cdot\ln a+\ln^2 a$

$\iff 2\ln a = 0$

$\iff \underline{\underline{a = 1}}$

Une seule tangente à G_f passe par O, à savoir la tangente T_1 d'éq. $y = x$.

4) $\int f(x)\,dx = \int(x + x\cdot\ln^2 x)\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2 + \int x\cdot\ln^2 x\,dx$

<u>par parties :</u>
$u(x) = \ln^2 x \quad v'(x) = x$
$u'(x) = 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x} \quad v(x) = \frac{1}{2}x^2$

$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int x\ln x\,dx$

<u>par parties :</u>
$u(x) = \ln x \quad v'(x) = x$
$u'(x) = \frac{1}{x} \quad v(x) = \frac{1}{2}x^2$

$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \int\frac{1}{2}x\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$

$= \underline{\underline{\frac{1}{4}x^2\left(2\ln^2 x - 2\ln x + 3\right) + C}}$

Aire $= \int_1^e f(x)\,dx$

$= \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{4} = \underline{\frac{3}{4}(e^2-1)\ u.a.}$

$\underline{\underline{\approx 4{,}79\ u.a.}}$

III 1) $4^{x+1} - 2^{x+2} + \ln a = 0 \quad (a > 0)$

$\Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^{x} + \ln a = 0 \quad (*)$

pour $Y = 2^{x} > 0$.

$4Y^2 - 4Y + \ln a = 0 \quad (**)$

$\Delta = (-4)^2 - 16 \ln a = 16 \cdot (1 - \ln a)$

$P = \frac{\ln a}{4} \quad ; \quad S = 1$

a	0		1		e	$+\infty$
Δ	//	$+$		$+$	0	$-$
P	//	$-$	0	$+$		$+$
S	//	$+$	1	$+$		$+$
sol. de $(**)$	//	$Y_1 < 0$, $Y_2 > 0$	$\boxed{Y_1 = 0,\ Y_2 = 1}$	$Y_1 > 0$, $Y_2 > 0$	$\boxed{Y_0 > 0}$	pas de racine réelle
nombre de sol. de $(*)$	//	1 sol.	$\boxed{\text{1 sol}}$	2 sol.	$\boxed{\text{1 sol.}}$	0 sol.

En résumé,

Si $0 < a < 1$, l'éq. admet 1 solution.
Si $a = 1$, l'éq. admet 1 solution.
Si $1 < a < e$, l'éq. admet 2 solutions.
Si $a = e$, l'éq. admet 1 solution.
Si $a > e$, l'éq. n'admet pas de solution.

2) C.E.: 1) $x > 0$ 2) $9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$

$\forall x \in D =]0 ; 3[$,

$\log_{\frac{1}{2}}(9 - x^2) - \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{x} \geq \log_8 x$

$\Leftrightarrow \frac{\log_2 (9-x^2)}{\log_2 \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} \geq \frac{\log_2 x}{\log_2 8}$

$\Leftrightarrow -\log_2 (9 - x^2) + \frac{1}{3} \log_2 x \geq \frac{1}{3} \log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2 (9 - x^2) \leq 0$

$\Leftrightarrow 9 - x^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow x \leq -2\sqrt{2}$ ou $x \geq 2\sqrt{2}$

$S = [2\sqrt{2} ; 3[$

3) $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x \, dx$

$= \int \cos^4 x \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x \, dx$

$= \int \left(\cos^4 x \cdot \sin x - \cos^6 x \cdot \sin x \right) dx$

$= -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 - \cos x} \, dx$

$t = \tan \frac{x}{2}$

$\frac{dt}{dx} = \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$

$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$

$= \int_0^1 \frac{1}{2 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} \, dt$

$= \int_0^1 \frac{2}{2 + 2t^2 - 1 + t^2} \, dt$

$= \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3}t)^2} \, dt$

$= \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan(\sqrt{3}t) \right]_0^1$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 0$

$= \frac{2\sqrt{3} \cdot \pi}{9} \approx 1,2092$

Corrigé du problème V200

(1) Par hypothèse f est paire, donc $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c\,,$$

où a, b et c sont les coefficients réels inconnus. Pour déterminer a, b et c, on résout le système suivant, formé des trois ***conditions nécessaires*** :

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(4) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$$

(La 3$^{\text{e}}$ condition est une condition nécessaire pour avoir un maximum en 2, mais évidemment cette condition n'est pas suffisante.) On trouve alors, à l'aide de la V200, la solution unique :

$$a = -\frac{1}{64}\,,\ b = \frac{1}{8}\ \text{ et }\ c = 2\,.$$

Il reste à vérifier que la fonction trouvée

$$f : x \mapsto -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + 2$$

admet bien un maximum en 2. Or,

$$f''(2) = -\frac{1}{2} < 0\,,$$

donc f admet bien un maximum en 2. Le graphe de la fonction f représente donc le bord de la lèvre supérieure.

(2) Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. On trouve à l'aide de la V200 : $x = 4$ ou $x = -4$. D'où les points d'intersection de $\mathcal{G}_f$ et $\mathcal{G}_g$: $I_1(-4,0)$ et $I_2(4,0)$.

(3) Pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{x}{4} - \frac{x^3}{16} = \frac{x}{16}(2-x)(2+x)$$

f' s'annule et change de signe en 0, 2 et -2. On sait déjà que f admet un maximum en 2 (voir question (1)) et en –2 (par symétrie). De plus,

$$f''(0) = \frac{1}{4} > 0\,,$$

donc f admet un minimum en 0.

D'autre part, pour tout réel x :

$$f''(x) = \frac{1}{4} - \frac{3x^2}{16}.$$

On a :

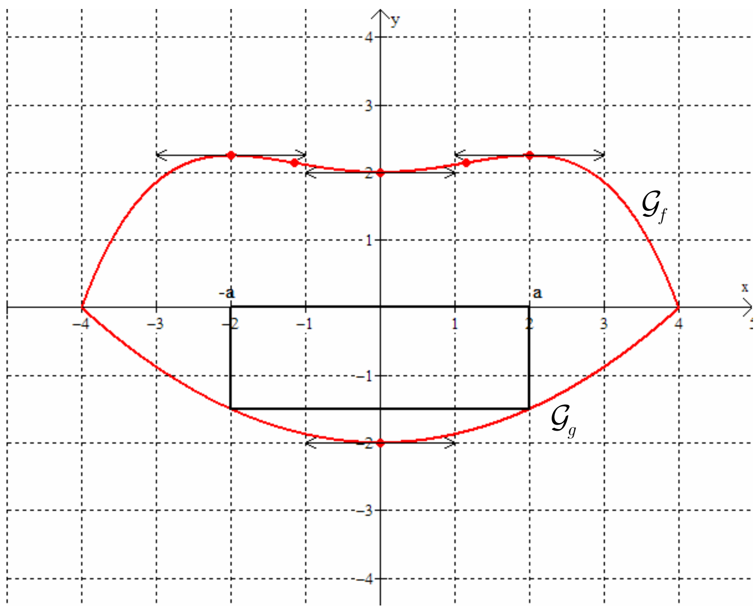
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cong 1{,}15$$

f'' s'annule et change de signe en ces réels (car f'' est un polynôme du second degré), donc $\mathcal{G}_f$ admet des points d'inflexion en $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D'où le tableau de variation et de concavité de f : on peut se restreindre à l'intervalle $[0,+\infty[$, à cause de la symétrie du graphe.

	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	2 (m) $\nearrow$	$\frac{77}{36}$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$ (M)	$\searrow$ $-\infty$
$\mathcal{G}_f$		P.I $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{77}{36}\right)$			

(4) Le logo est formé par les graphes de f et de g, restreints à $[-4,4]$.



(5) $\mathcal{A} = \int_{-4}^{4} (f(x) - g(x))\,dx = \frac{128}{5}$ u.a.

(6) Soit $a \in [0,4]$ l'abscisse du bord droit du rectangle (cf. graphique). Donc $-a$ est l'abscisse du bord gauche, puisque g est paire. La hauteur du

rectangle est $-g(a) = 2 - \frac{a^2}{8}$, puisque g est négative sur $[0,4]$. L'aire du rectangle s'écrit donc :

$$h(a) = -2ag(a) = \frac{-a\left(a^2 - 16\right)}{4}.$$

Il s'agit de voir si cette fonction admet un maximum sur $[0,4]$. Or,

$$h'(a) = 4 - \frac{3a^2}{4} \text{ et } h'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ ou } a = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

La solution négative est évidemment à exclure. Il reste à voir si h admet bien un maximum en $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Or, $h''\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0$. Donc h admet bien un maximum en $\frac{4\sqrt{3}}{3} \cong 2,3$. L'aire maximale du rectangle est ainsi :

$$h\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{32\sqrt{3}}{9} \text{ u.a.}$$