Corrigé

I

$$f(x) = \begin{cases} x - e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2(1 - 2\ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) **continuité en 0 :**

- $\lim\limits_{x \to 0^-} x - \underbrace{e^{\overset{\to -\infty}{\boxed{\frac{1}{x}}}}}_{\to 0} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{(1 - 2 \underbrace{\ln x}_{\to -\infty})}_{\to +\infty}$ f.i. "$0 \cdot \infty$"

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - 2\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{-2}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$,

par conséquent **f est continue en 0.**

dérivabilité en 0 :

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \Big(1 - \underbrace{\boxed{\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}}}_{\to 0}\Big) = 1 = f'_g(0)$

en effet :

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\frac{1}{x}) \to -\infty}{e^{\frac{-1}{x}}) \to +\infty}$ f.i. "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}}} = \lim\limits_{x \to 0^-} -e^{\frac{1}{x}} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{(1 - 2\ln x)}_{\to +\infty}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - 2\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{-2}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} 2x = 0 = f'_d(0)$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$, donc **f n'est pas dérivable en 0.**

O(0 ; 0) est un point anguleux.

$\text{dom } f = \mathbb{R} = \text{dom}_c f$

$\text{dom}_d f = \mathbb{R}_0$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{(1 - 2\ln x)}_{\to -\infty} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty} \underbrace{(1 - 2\ln x)}_{\to -\infty} = -\infty$

B.P. dans la direction de l'axe des Y si $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \Big(\underbrace{x}_{\to -\infty} - \underbrace{e^{\overset{\to 0}{\boxed{\frac{1}{x}}}}}_{\to 1}\Big) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \Big(1 - \underbrace{\boxed{\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}}}_{\to 0}\Big) = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-e^{\frac{1}{x}}\right) = -1$

A.O. : $y = x - 1$ si $x \to -\infty$

3) $\forall x \in \,]0 ; +\infty[$,

$f'(x) = 2x \cdot (1 - 2\ln x) + x^2 \cdot \frac{-2}{x} = -4x \cdot \ln x$

$\forall x \in \,]-\infty ; 0[$

$f'(x) = 1 - \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		+	1 ‖ 0	+	0	−	
f	$-\infty$	↗	0	↗	1 MAX	↘	$-\infty$

4) $\forall x \in \,]0 ; +\infty[$,

$f''(x) = -4 \cdot \ln x - 4x \cdot \frac{1}{x} = -4(1 + \ln x)$

$\forall x \in \,]-\infty ; 0[$

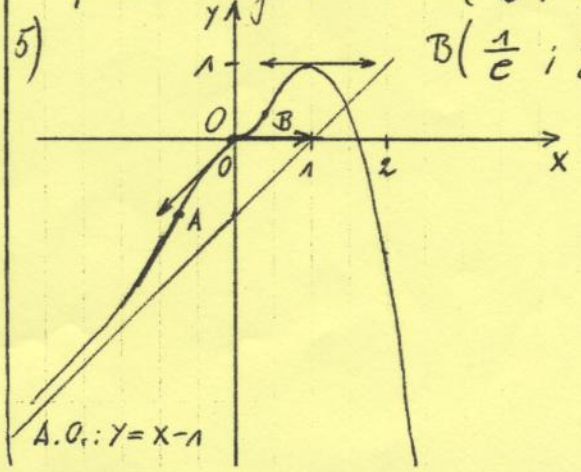
$f''(x) = \frac{-2}{x^3} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}(2x + 1)$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		0		$\frac{1}{e}$	
f''		+	0	−	‖	+	0	−
concavité		∪		∩		∪		∩

points d'inflexion : $A\left(\frac{-1}{2} ; \frac{-1}{2} - e^{-2}\right)$

$B\left(\frac{1}{e} ; \frac{3}{e^2}\right)$

5)



6) $f(\sqrt{e})=0$

$$\text{aire} = -\int_{\sqrt{e}}^{e} x^2(1-2\ln x)\,dx$$

Par parties :

$u(x)=1-2\ln x \qquad v'(x)=x^2$

$u'(x)=\frac{-2}{x} \qquad v(x)=\frac{1}{3}x^3$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3(1-2\ln x)\right]_{\sqrt{e}}^{e} + \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{-2}{3}x^2\,dx$$

$$= -\left(\frac{-1}{3}e^3 - 0\right) + \left[\frac{-2}{9}x^3\right]_{\sqrt{e}}^{e}$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{9}e^3 + \frac{2}{9}e\sqrt{e}$$

$$= \frac{1}{9}\left(e^3+2e\sqrt{e}\right)\text{ cm}^2 \approx 3,23\text{ cm}^2$$

II $\quad f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}$

1) C.E : $2-e^{2x}>0 \iff e^{2x}<2 \iff x<\frac{\ln 2}{2}$

$\text{dom } f = \left]-\infty ; \frac{\ln 2}{2}\right[= \text{dom}_c f = \text{dom}_d f$

$$\lim_{x\to\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^x \ \nearrow\sqrt{2}}{\sqrt{2-e^{2x}}\ \searrow 0^+} = +\infty \qquad \underline{\text{A.V.} : x=\frac{\ln 2}{2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x \ \nearrow 0}{\sqrt{2-e^{2x}}\ \searrow\sqrt{2}} = 0 \qquad \underline{\text{A.H.} : y=0}$$

$\underline{\text{si } x\to-\infty}$

2) $\forall x \in \text{dom}_d f$,

$$f'(x) = \frac{e^x\cdot\sqrt{2-e^{2x}} - e^x\cdot\frac{-2\cdot e^{2x}}{2\sqrt{2-e^{2x}}}}{2-e^{2x}}$$

$$= \frac{e^x\cdot(2-e^{2x}) + e^x\cdot e^{2x}}{\sqrt{2-e^{2x}}\cdot(2-e^{2x})}$$

$$= \frac{2e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}\cdot(2-e^{2x})} > 0$$

donc f est strictement croissante sur dom f.

$f(0)=1$; $f'(0)=2$

éq. de T_0 : $\underline{y = 2\cdot x+1}$

3) $$\int \frac{e^x}{\sqrt{2-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx$$

$$= \arcsin\left(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\right) + C \quad = F(x)$$

Déterminons C :

$F(0)=0$

$\iff \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+C=0$

$\iff C = \frac{-\pi}{4}$

d'où : $F(x) = \arcsin\left(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4}$

4) $k<0$.

$$V(k) = \pi\cdot\int_k^0 [f(x)]^2\,dx$$

$$= \pi\int_k^0 \frac{e^{2x}}{2-e^{2x}}\,dx$$

$$= \pi\int_k^0 \frac{-1}{2}\,\frac{-2e^{2x}}{2-e^{2x}}\,dx$$

$$= \frac{-\pi}{2}\left[\ln\left(2-e^{2x}\right)\right]_k^0$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln\left(2-e^{2k}\right) \text{ u.v.}$$

$$\lim_{k\to-\infty} \frac{\pi}{2}\ln\left(2-e^{2k}\right) = \frac{\pi\cdot\ln 2}{2}$$

5) C.E. : 1) $x>0$ et $x\neq 1$

2) $1-x>0 \iff x<1$

3) $x+5>0 \iff x>-5$

$\forall x \in D =]0;1[$

$\log_x \sqrt{1-x} + \log_{x^2}(x+5) \geqslant 0$

$\iff \dfrac{\ln\sqrt{1-x}}{\ln x} + \dfrac{\ln(x+5)}{\ln x^2} \geqslant 0$

$\iff \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\ln(1-x)}{\ln x} + \dfrac{\ln(x+5)}{2\ln x} \geqslant 0 \quad \Big|\cdot 2\cdot\underbrace{\ln x}_{<0}$

$\iff \ln\left(-x^2-4x+5\right) \leqslant 0$

$\iff -x^2-4x+5 \leqslant 1$

$\iff -x^2-4x+4 \leqslant 0$

$\Delta = 32$

$x_1 = -2-2\sqrt{2} < 0$

$x_2 = -2+2\sqrt{2} \approx 0,83$

$S = \left[-2+2\sqrt{2} \,;\, 1\right[$

6) C.E. : —

$$4^{x} - 2^{x+1} = a \qquad (**)$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} - 2\cdot 2^{x} - a = 0$$

Poser : $Y = 2^{x}$

$$Y^2 - 2Y - a = 0 \qquad (*)$$

$$\Delta = 4 + 4a = 4(a+1)$$

<u>1^er cas : $a < -1$</u>

(*) n'admet pas de racine réelle

(**) n'admet pas de solutions

<u>2^e cas : $a = -1$</u>

(*) admet une seule racine : 1

(**) admet une seule racine : 0

<u>3^e cas : $a > -1$</u>

(*) admet 2 racines réelles distinctes x_1 et x_2

$$S = x_1 + x_2 = +2$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = -a$$

Si $-1 < a < 0$, x_1 et x_2 sont strictement positifs et (**) admet 2 solutions.

Si $a = 0$, une des racines est nulle et l'autre est égale à 2. Donc (**) admet une seule solution.

Si $a > 0$, les deux racines ont des signes contraires et (**) admet une seule solution.

a	nombre de solutions de (**)
$a < -1$	0
$a = -1$	1
$-1 < a < 0$	2
$a = 0$	1
$a > 0$	1

III 1) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (2x+1)^2 \sqrt{x+1}\, dx$

Poser : $t = x+1 \Leftrightarrow x = t-1$

$\frac{dx}{dt} = 1$

Si $x = -1$, $t = 0$.

Si $x = 0$, $t = 1$.

$$= \int_0^1 (2t-1)^2 \sqrt{t}\, dt$$

$$= \int_0^1 \left(4t^{\frac{5}{2}} - 4t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right) dt$$

$$= \left[\frac{8}{7} t^{\frac{7}{2}} - \frac{8}{5} t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{8}{7} - \frac{8}{5} + \frac{2}{3} = \frac{22}{105}$$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(2+\sin x)\cdot \cos x}\, dx$

Poser : $t = \tan\frac{x}{2}$

$$\frac{dt}{dx} = \left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1+t^2}{2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Si $x = 0$; $t = 0$

Si $x = \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{\left(2 + \frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1+t^2}{(1+t+t^2)(1-t^2)}\, dt$$

(TI-V200 expand)

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{-2t-1}{3(t^2+t+1)} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{3(t-1)}\right) dt$$

$$= \left[\frac{-1}{3} \ln\left|t^2+t+1\right| + \ln\left|t+1\right| - \frac{1}{3}\ln\left|t-1\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{2(9\sqrt{3}+16)}{13}\right) = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{-9\sqrt{3}+16}{2}\right)$$

$$= \frac{-1}{3}\ln\frac{4+\sqrt{3}}{3} + \ln\frac{3+\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}\ln\frac{3-\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}527$$

3) $\displaystyle\int e^{2x} \arctan(e^{x})\, dx$

Poser : $t = e^{x}$

$\frac{dt}{dx} = e^{x}$

Par parties :

$u(t) = \arctan t \quad v'(t) = t$

$u'(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad v(t) = \frac{t^2}{2}$

$$= \int t^2 (\arctan t)\, \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \int t\, (\arctan t)\, dt$$

$$= \frac{t^2}{2}\arctan t - \int \frac{t^2}{2(t^2+1)}\, dt$$

$$= \frac{t^2}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

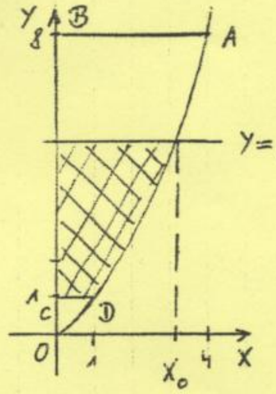
$$= \frac{t^2}{2}\arctan t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\arctan t + C$$

$$= \frac{t^2+1}{2}\arctan t - \frac{1}{2}t + C$$

$$= \frac{e^{2x}+1}{2}\arctan(e^{x}) - \frac{1}{2}e^{x} + C$$

Problème

1)



Déterminons l'abscisse x_0 du point d'intersection de C_f et de la droite d'équation $y = m$:

$$f(x_0) = m \qquad (x_0 > 0 \,;\, m > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0^{\frac{3}{2}} = m$$

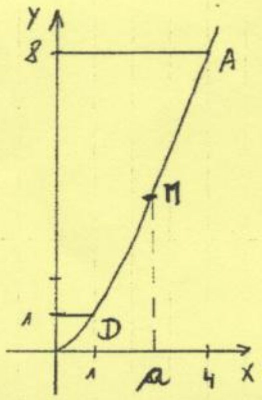
$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x_0 = m^{\frac{2}{3}}}}$$

Déterminons m en résolvant l'équation :

$$\underbrace{\int_0^1 (m-1)\,dx + \int_1^{m^{\frac{2}{3}}} \left(m - f(x)\right) dx}_{\text{aire hachurée}} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left[7 + \int_1^4 \left(8 - f(x)\right) dx \right]}_{\text{aire totale du terrain}}$$

On trouve : $\underline{\underline{m \approx 5,38}}$

2)

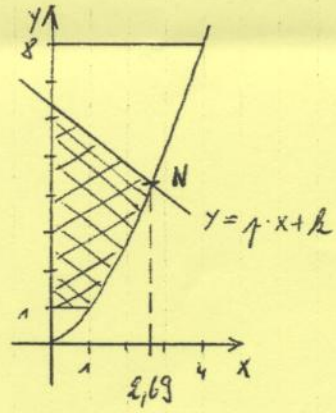


Déterminons a en résolvant l'équation :

$$\underbrace{\int_1^a \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx}_{\text{longueur de } \widehat{DM}} = \frac{1}{2} \underbrace{\int_1^4 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx}_{\text{longueur de } \widehat{DA}}$$

On trouve : $\underline{\underline{a \approx 2,69}}$

3)



Déterminons p et k en résolvant le système :

$$\begin{cases} p \cdot 2,69 + k = f(2,69) & (N \text{ appartient à la droite}) \\ \underbrace{\int_0^1 \left(px + k - 1\right) dx + \int_1^{2,69} \left(px + k - f(x)\right) dx}_{\text{aire hachurée}} = \frac{1}{2} \underbrace{\left[7 + \int_1^4 \left(8 - f(x)\right) dx \right]}_{\text{aire totale du terrain}} \end{cases}$$

On trouve : $\underline{p \approx -0,77}$ et $\underline{k \approx 6,48}$

4) La fonction polynôme doit vérifier les 5 conditions suivantes :

$$\begin{cases} g(1) = f(1) \\ g(4) = f(4) \\ g(3) = 4 \\ g'(1) = f'(1) \\ g'(4) = f'(4) \end{cases}$$

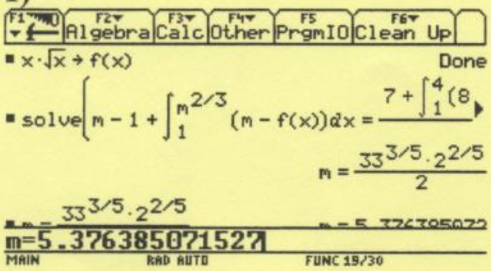
Pour $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ le système admet une seule solution :

$$a = \frac{-8}{27} \,;\, b = \frac{53}{18} \,;\, c = \frac{-169}{18} \,;\, d = \frac{341}{27} \,;\, e = \frac{-44}{9}.$$

Par conséquent la fonction polynôme de degré minimal vérifiant les conditions est définie par

$$\underline{\underline{g(x) = \frac{-8}{27} x^4 + \frac{53}{18} x^3 + \frac{-169}{18} x^2 + \frac{341}{27} x + \frac{-44}{9}}}.$$

1)



■ $x\cdot\sqrt{x} \rightarrow f(x)$ Done

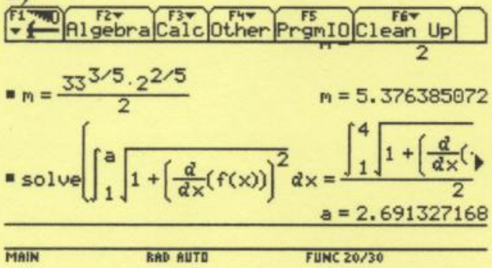
■ solve$\left(m - 1 + \int_1^{m^{2/3}} (m - f(x))dx = \frac{7 + \int_1^4 (8}{}\right.$▸

$m = \frac{33^{3/5}\cdot 2^{2/5}}{2}$

■ $m = \frac{33^{3/5}\cdot 2^{2/5}}{2}$ $m = 5.376385072$

m=5.376385071527

2)

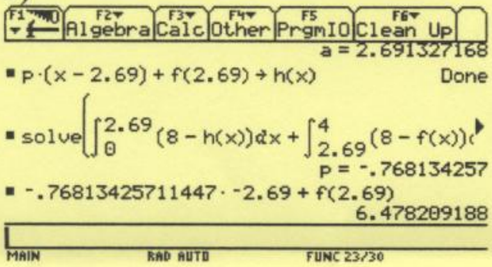


■ $m = \frac{33^{3/5}\cdot 2^{2/5}}{2}$ $m = 5.376385072$

■ solve$\left(\int_1^a \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2} dx = \frac{\int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}(\right.}}{2}\right.$▸

$a = 2.691327168$

3)



$a = 2.691327168$

■ $p\cdot(x - 2.69) + f(2.69) \rightarrow h(x)$ Done

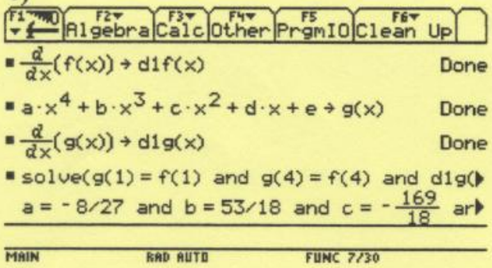
■ solve$\left(\int_0^{2.69} (8 - h(x))dx + \int_{2.69}^4 (8 - f(x))\right.$▸

$p = ^-.768134257$

■ $^-.76813425711447\cdot {}^-2.69 + f(2.69)$

6.478209188

4)



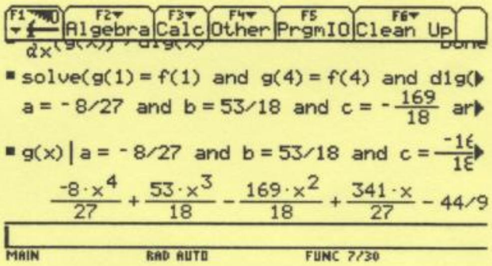
■ $\frac{d}{dx}(f(x)) \rightarrow d1f(x)$ Done

■ $a\cdot x^4 + b\cdot x^3 + c\cdot x^2 + d\cdot x + e \rightarrow g(x)$ Done

■ $\frac{d}{dx}(g(x)) \rightarrow d1g(x)$ Done

■ solve(g(1) = f(1) and g(4) = f(4) and d1g(▸

a = ⁻8/27 and b = 53/18 and c = $-\frac{169}{18}$ ar▸



$\frac{d}{dx}(g(x)) \rightarrow d1g(x)$ Done

■ solve(g(1) = f(1) and g(4) = f(4) and d1g(▸

a = ⁻8/27 and b = 53/18 and c = $-\frac{169}{18}$ ar▸

■ g(x) | a = ⁻8/27 and b = 53/18 and c = $\frac{^-16}{18}$▸

$\frac{^-8\cdot x^4}{27} + \frac{53\cdot x^3}{18} - \frac{169\cdot x^2}{18} + \frac{341\cdot x}{27} - 44/9$