LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	**EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES** **2019** **CORRIGÉ – BARÈME**	

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques I	**D**	*Durée de l'épreuve :* 1h45 *Date de l'épreuve :* 16/09/2019

I.

Soit $z_0 = bi \quad (b \in \mathbb{R})$ une racine imaginaire pure de P.

$$P(ib)=0 \Leftrightarrow (ib)^3+(5i-6)(ib)^2+(9-24i)(ib)+(18+13i)=0$$

$$\Leftrightarrow -ib^3+6b^2-5b^2i+9bi+24b+18+13i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -b^3-5b^2+9b+13=0 & (pi) \\ 6b^2+24b+18=0 \Leftrightarrow b^2+4b+3=0 & (pr) \end{cases}$$

$(pr) \underset{\Delta'=1}{\Leftrightarrow} b=-1 \vee b=-3$.

Dans (pi): $-(-1)^3-5(-1)^2+9(-1)+13=0$ et $-(-3)^3-5(-3)^2+9(-3)+13=-32$.

$z_0=-i$.

Schéma de Hörner:

	1	$-6+5i$	$9-24i$	$18+13i$
$-i$		$-i$	$4+6i$	$-18-13i$
	1	$-6+4i$	$13-18i$	$\boxed{0}$

$P(z)=0 \Leftrightarrow z=-i$ ou $z^2-(6-4i)z+13-18i=0$.

$\Delta=(6-4i)^2-4\cdot(13-18i)=-32+24i$.

Soit $\delta = x+iy \ (x,y \in \mathbb{R})$ une racine carrée de $-32+24i$.

Alors $\begin{cases} x^2+y^2=\left|-32+24i\right|=40 & (1) \\ x^2-y^2=-32 & (2) \\ 2xy=24>0 & (3) \end{cases}$

$(1)+(2) \Rightarrow x=\pm 2$; $(1)-(2) \Rightarrow y=\pm 6$; de (3), x et y ont le même signe.

$\delta=\pm(2+6i)$.

Les solutions du trinôme du second degré sont $\dfrac{6-4i\pm(2+6i)}{2}=\begin{cases}4+i\\2-5i\end{cases}$

$S=\{-i;4+i;2-5i\}$

II.

1)

a)

$$Z=\frac{24(\sqrt{3}+i)-16(1-i\sqrt{3})}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}$$

$$=\frac{72\sqrt{3}+72i-48+48i\sqrt{3}-48i\sqrt{3}+48+32i+32\sqrt{3}}{9+4}$$

$$=\frac{104\sqrt{3}+104i}{13}$$

$$=8\sqrt{3}+8i \quad \text{f.a. de } Z$$

b) $|Z| = |8\sqrt{3} + 8i| = 16$

$$Z = 16 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 16cis\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{f.t. de } Z$$

Soit $z = rcis\alpha$ une racine quatrième de Z.

$$z^4 = Z \Leftrightarrow r^4 cis(4\alpha) = 16cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\alpha = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{16} = 2 \\ \alpha = \dfrac{\pi}{24} + k\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Les racines quatrièmes de Z sont :

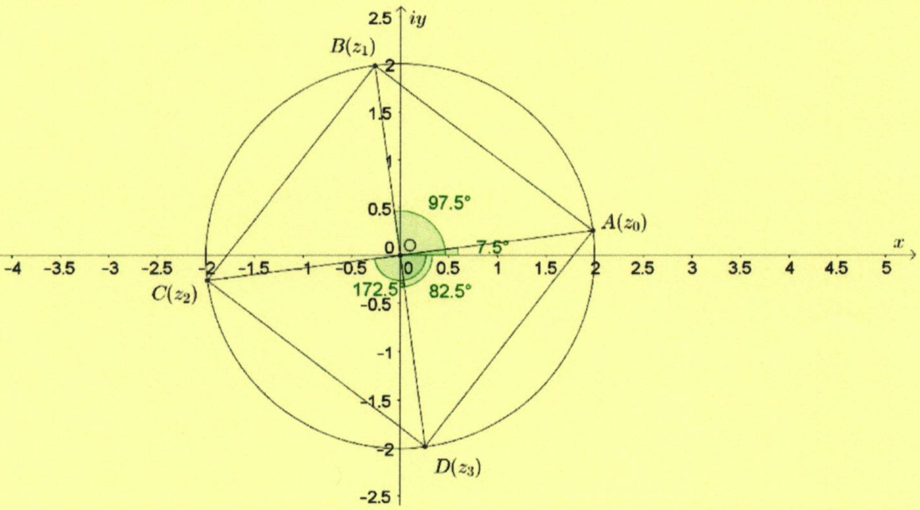
$$z_k = 2cis\left(\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{avec } k \in \{0; 1; 2; 3\}$$

$$z_0 = 2cis\left(\frac{\pi}{24}\right) = 2cis(7{,}5^\circ)$$

$$z_1 = 2cis\left(\frac{13\pi}{24}\right) = 2cis(97{,}5^\circ)$$

$$z_2 = 2cis\left(\frac{25\pi}{24}\right) = 2cis\left(-\frac{23\pi}{24}\right) = 2cis(-172{,}5^\circ)$$

$$z_3 = 2cis\left(-\frac{11\pi}{24}\right) = 2cis(-82{,}5^\circ)$$



2)

$$\frac{(-2i)^5 \cdot \left[2cis\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]^4}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)^7} = \frac{-32i \cdot 2^4 cis(-3\pi)}{\left[\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^7}$$

$$= \frac{-32i \cdot 16 \cdot (-1)}{\sqrt{2}^7 \cdot cis\left(7 \cdot \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{512i}{8\sqrt{2}\cdot cis\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$= \frac{512i}{8\sqrt{2}}\cdot cis\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 32i\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= 16\sqrt{6}+16i\sqrt{2}$$

III.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -m & -4 \\ 1 & m & -2 \\ -m & 3 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -m \\ 1 & m \\ -m & 3 \end{matrix}$$
$$= 0 - 2m^2 - 12 - 4m^2 + 18 + 0$$
$$= 6 - 6m^2$$
$$= 6(1-m)(1+m)$$

$\det A = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = -1$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 6 & -m & -4 \\ 3 & m & -2 \\ m+1 & 3 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & -m \\ 3 & m \\ m+1 & 3 \end{matrix}$$
$$= 0 + 2m^2 + 2m - 36 + 4m^2 + 4m + 36 + 0$$
$$= 6m^2 + 6m$$
$$= 6m(m+1)$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -m & m+1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \\ -m & m+1 \end{matrix}$$
$$= 0 + 12m - 4m - 4 - 12m + 6m + 6 + 0$$
$$= 2m + 2$$
$$= 2(m+1)$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 3 & -m & 6 \\ 1 & m & 3 \\ -m & 3 & m+1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -m \\ 1 & m \\ -m & 3 \end{matrix}$$
$$= 3m^2 + 3m + 3m^2 + 18 + 6m^2 - 27 + m^2 + m$$
$$= 13m^2 + 4m - 9$$
$$\underbrace{=}_{\Delta'=121} 13\left(m - \frac{9}{13}\right)(m+1)$$
$$= (13m-9)(m+1)$$

Discussion :

- Si $m \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$, $\det A \neq 0$ et le système admet une solution unique.
  $$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{m}{1-m}$$
  $$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{1}{3(1-m)}$$
  $$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{13m-9}{6(1-m)}$$
  $$S = \left\{\left(\frac{m}{1-m}; \frac{1}{3(1-m)}; \frac{13m-9}{6(1-m)}\right)\right\}$$
  Interprétation géométrique: Les équations du système sont celles de trois plans ayant un unique point en commun à savoir le point $A\left(\frac{m}{1-m}; \frac{1}{3(1-m)}; \frac{13m-9}{6(1-m)}\right)$.
- Si $m = -1$, $\det A = 0$ et le système n'admet pas une solution unique.
  $\det A_x = \det A_y = \det A_z = 0$. On ne peut pas conclure.

$$(s) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x & + & y & - & 4z & = & 6 \\ x & - & y & - & 2z & = & 3 \\ x & + & 3y & & & = & 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{(2)\,/\,(1)-3\cdot(2) \\ (3)\,/\,(1)-3\cdot(3)}} \begin{cases} 3x & + & y & - & 4z & = & 6 \\ & & 4y & + & 2z & = & -3 \\ & & -8y & - & 4z & = & 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - 4z = 6 \\ 4y + 2z = -3 \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé.
Posons $y = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
De (2) : $z = -2\alpha - \frac{3}{2}$.
Dans (1) : $3x = 6 - \alpha - 8\alpha - 6 \Leftrightarrow x = -3\alpha$.
$S = \left\{\left(-3\alpha; \alpha; -2\alpha - \frac{3}{2}\right) / \alpha \in \mathbb{R}\right\}$
Interprétation géométrique: Les équations du système sont celles de trois plans se coupant suivant une droite passant par le point $B\left(0; 0; -\frac{3}{2}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- Si $m = 1$, $\det A = 0$ et le système n'admet pas une solution unique.
  $\det A_x = 12 \neq 0$.
  Le système est impossible.
  $S = \emptyset$
  Interprétation géométrique: Les équations du système sont celles de trois plans n'ayant aucun point en commun.

IV.

1)

$$A(2; -1; 0) \in d \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2\cdot(-1) + 0 = 3 \\ -2 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3 \\ -4 = 1 \end{cases} \text{ impossible}$$

$A \notin d$.

2) Cherchons un système d'équations paramétriques de la droite d :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{(2)/(1)-(2)} \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 2z = 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x = z + 1 \end{cases}$$

Posons $z = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
De (2) : $x = \alpha + 1$.
Dans (1) : $2y = 3 - \alpha - 1 - \alpha \Leftrightarrow y = 1 - \alpha$.
D'où un système d'équations paramétriques de d :

$$d \equiv \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = 1 - \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

3) d est une droite passant par le point $C(1; 1; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$M(x\,; y\,; z) \in \pi \Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{AM}\,; \overrightarrow{AC}\,; \vec{u}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ y+1 & 2 & -1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-2 & -1 \\ y+1 & 2 \\ z & 0 \end{matrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)+z+0-2z-0+(y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x+y-z=3$$

$\pi \equiv 2x+y-z=3$

4)

$$M(x\,;y\,;z) \in \pi' \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot 1 + (y+2)\cdot(-1) + (z+1)\cdot 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-y+z=3$$

$\pi' \equiv x-y+z=3.$

5) $d' = (AB)$.

$M(x;y;z) \in d' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow (\exists \beta \in \mathbb{R}) / \overrightarrow{AM} = \beta \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow (\exists \beta \in \mathbb{R}) / \begin{cases} x-2=0 \\ y+1=-\beta \\ z=-\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\exists \beta \in \mathbb{R}) / \begin{cases} x=2 \\ y=-\beta-1 \\ z=-\beta \end{cases}$$

D'où un système d'équations paramétriques de d' :

$$d' \equiv \begin{cases} x &= 2 \\ y &= -\beta-1 \\ z &= -\beta \end{cases} \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{R}.$$

6)

$$M(x;y;z) \in d \cap d' \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=3 \\ -x+2y+3z=1 \\ x=2 \\ y=-\beta-1 \\ z=-\beta \end{cases}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{(3),(4)\text{ et }(5) \\ \text{dans }(1)\text{ et }(2)}} \begin{cases} 2-2\beta-2-\beta=3 \\ -2-2\beta-2-3\beta=1 \\ x=2 \\ y=-\beta-1 \\ z=-\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-1 \\ \beta=-1 \\ x=2 \\ y=-\beta-1 \\ z=-\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-1 \\ x=2 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

$d \cap d' = \{D(2;0;1)\}$

d et d' sont sécantes au point $D(2;0;1)$.