LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2019
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques I	**D**	*Durée de l'épreuve :*	*105 minutes*
		Date de l'épreuve :	*04/06/2019*

Corrigé ①

I) $2z^3 + (3-2i)z^2 + (-19+5i)z + 4 + 52i = 0$

$z_0 = a \ (a \in \mathbb{R})$ est solution de l'équation

$\Leftrightarrow 2a^3 + (3-2i)a^2 + (-19+5i)a + 4 + 52i = 0$

$\Leftrightarrow 2a^3 + 3a^2 - 2a^2 i - 19a + 5ai + 4 + 52i = 0$

$\Leftrightarrow 2a^3 + 3a^2 - 19a + 4 + (-2a^2 + 5a + 52)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^3 + 3a^2 - 19a + 4 = 0 & (1) \\ -2a^2 + 5a + 52 = 0 & (2) \end{cases}$

(2) : $\Delta = 25 + 416 = 441$

$a_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 21}{-4} \nearrow^{-4}_{\searrow \frac{13}{2}}$

$a = -4$ dans (1): $-128 + 48 + 76 + 4 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow z_0 = -4$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3-2i & -19+5i & 4+52i \\ -4 & & -8 & 20+8i & -4-52i \\ \hline & 2 & -5-2i & 1+13i & \| \ 0 \end{array}$$

$(z+4)\ [2z^2 + (-5-2i)z + 1 + 13i] = 0$

$\Delta = (-5-2i)^2 - 8(1+13i) = 25 + 20i - 4 - 8 - 104i$

$= 13 - 84i$

pos: $t = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$ racine carrée de Δ

$\Leftrightarrow (a+bi)^2 = 13 - 84i$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = 13 - 84i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 85 & (1) \\ a^2 - b^2 = 13 & (2) \\ ab < 0 & (3) \end{cases}$

$(1)+(2)$: $2a^2 = 98 \Leftrightarrow a^2 = 49 \Leftrightarrow a = \pm 7$

$(1)-(2)$: $2b^2 = 72 \Leftrightarrow b^2 = 36 \Leftrightarrow b = \pm 6$

D'après (3): racines carrées de Δ: $t_1 = 7 - 6i$

$t_2 = -7 + 6i$

②

$$z_1 = \frac{5+2i+7-6i}{4} = \frac{12-4i}{4} = 3-i$$

$$z_2 = \frac{5+2i-7+6i}{4} = \frac{-2+8i}{4} = -\frac{1}{2}+2i$$

$$S = \{-4 \,;\, 3-i \,;\, -\tfrac{1}{2}+2i\}$$

II) 1)

$$z = \frac{(1-i)(-\sqrt{3}+i)}{1-i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i+1}{1-i\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i}{1-i\sqrt{3}} \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}+(\sqrt{3}-3+1+\sqrt{3})i-\sqrt{3}-3}{1+3} = \frac{-2-2\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})i}{4}$$

$$z = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$$

2) • $z_1 = 1-i \qquad |z_1| = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$$

$z_1 = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

• $z_2 = -\sqrt{3}+i \qquad |z_2| = \sqrt{3+1} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$$

$z_2 = 2\ \text{cis}\ \frac{5\pi}{6}$

• $z_3 = 1-i\sqrt{3} \qquad |z_3| = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$$

$z_3 = 2\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

• $$z = \frac{\sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot 2\ \text{cis}\ \frac{5\pi}{6}}{2\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\frac{3\pi}{12}+\frac{10\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{11\pi}{12}$$

3) $$\sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{11\pi}{12} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{11\pi}{12} + i\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \sin\frac{11\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

4) racines cubiques de z : $z_k = \sqrt[6]{2}\ \text{cis}\left(\frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}\right)$, $k \in \{0,1,2\}$ ③

$z_0 = \sqrt[6]{2}\ \text{cis}\ \frac{11\pi}{36}$

$z_1 = \sqrt[6]{2}\ \text{cis}\left(\frac{11\pi}{36} + \frac{24\pi}{36}\right) = \sqrt[6]{2}\ \text{cis}\ \frac{35\pi}{36}$

$z_2 = \sqrt[6]{2}\ \text{cis}\left(\frac{11\pi}{36} + \frac{48\pi}{36}\right) = \sqrt[6]{2}\ \text{cis}\ \frac{59\pi}{36}$

III) $P(z) = z^3 - (1-4i)z^2 + (m-10i)z - 5m(3-2i)$

$P(2i) = 0 \Leftrightarrow (2i)^3 - (1-4i)(2i)^2 + (m-10i)2i - 5m(3-2i) = 0$

$\Leftrightarrow -8i - (1-4i)\cdot(-4) + 2mi + 20 - 15m + 10mi = 0$

$\Leftrightarrow -8i + 4 - 16i + 2mi + 20 - 15m + 10mi = 0$

$\Leftrightarrow 24 - 24i - 15m + 12mi = 0$

$\Leftrightarrow m(-15 + 12i) = -24 + 24i$

$\Leftrightarrow m = \frac{-24+24i}{-15+12i} = \frac{-8+8i}{-5+4i} \cdot \frac{-5-4i}{-5-4i}$

$\Leftrightarrow m = \frac{40 + 32i - 40i + 32}{25 + 16}$

$\Leftrightarrow m = \frac{72}{41} - \frac{8}{41} i$

IV) $\begin{cases} mx + 4y + 2z = 2m \\ (m-1)x + my + z = m \\ x + 3y + z = 2 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} m & 4 & 2 \\ m-1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 4 + 6(m-1) - 2m - 3m - 4(m-1)$

$= m^2 + 4 + 6m - 6 - 5m - 4m + 4 = m^2 - 3m + 2$

$\Delta = 9 - 8 = 1 \qquad m_i = \frac{3 \pm 1}{2} \nearrow 2,\ \searrow 1$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = 2$

1) $m \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$

$\Delta x = \begin{vmatrix} 2m & 4 & 2 \\ m & m & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2m^2 + 8 + 6m - 4m - 6m - 4m$

$= 2m^2 - 8m + 8 = 2(m^2 - 4m + 4) = 2(m-2)^2$

$x = \frac{2(m-2)^2}{(m-2)(m-1)} = \frac{2(m-2)}{m-1}$

4

$$\Delta y = \begin{vmatrix} m & 2m & 2 \\ m-1 & m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 2m + 4(m-1) - 2m - 2m - 2m(m-1)$$

$$= m^2 + 2m + 4m - 4 - 4m - 2m^2 + 2m$$

$$= -m^2 + 4m - 4 = -(m^2 - 4m + 4) = -(m-2)^2$$

$$y = \frac{-(m-2)^2}{(m-2)(m-1)} = \frac{2-m}{m-1}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} m & 4 & 2m \\ m-1 & m & m \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \cancel{2m^2} + 4m + 6m(m-1) - \cancel{2m^2} - 3m^2 - 8(m-1)$$

$$= 4m + 6m^2 - 6m - 3m^2 - 8m + 8 = 3m^2 - 10m + 8$$

$$\Delta = 100 - 96 = 4$$

$$m_i = \frac{10 \pm 2}{6} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow \frac{4}{3} \end{matrix}$$

$$\Delta z = 3(m-2)\left(m - \frac{4}{3}\right) = (m-2)(3m-4)$$

$$z = \frac{(m-2)(3m-4)}{(m-2)(m-1)} = \frac{3m-4}{m-1}$$

$$S = \left\{\left(\frac{2(m-2)}{m-1} ; \frac{2-m}{m-1} ; \frac{3m-4}{m-1}\right)\right\}$$

Les 3 plans se coupent au point $I\left(\frac{2(m-2)}{m-1} ; \frac{2-m}{m-1} ; \frac{3m-4}{m-1}\right)$.

2) $m = 1$

$$\begin{cases} x + 4y + 2z = 2 & (1) \\ y + z = 1 & (2) \\ x + 3y + z = 2 & (3) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow y = 1 - z$

Dans (1) : $x + 4 - 4z + 2z = 2$

$\Leftrightarrow x - 2z = -2$

Dans (3) : $x + 3 - 3z + z = 2$ impossible

$\Leftrightarrow x - 2z = -1$

$S = \phi$

Les 3 plans n'ont pas de point commun.

3) $m = 2$

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2z = 4 \quad | :2 & (P_1) \\ x + 2y + z = 2 & (P_2) \\ x + 3y + z = 2 & (P_3) \end{cases}$$

⑤

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=2 \\ x+2y+z=2 \\ x+3y+z=2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=2 & (1) \\ x+3y+z=2 & (2) \end{cases}$

$(2)-(1):\ y=0$

Dans (1) : $x+z=2 \Leftrightarrow x=2-z$ pos : $z=\lambda$

$$\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$$

$S=\{(2-\lambda\,;0\,;\lambda)\,/\,\lambda\in\mathbb{R}\}$

Les 3 plans se coupent suivant une droite passant par le point $A(2,0,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1,0,1)$.

P_1 et P_2 sont confondus.

V) 1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$

$M(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -5 & -1 \\ y+1 & 1 & 3 \\ z & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow -(x-2)-15z-2(y+1)+z-6(x-2)-5(y+1)=0$

$\Leftrightarrow -7(x-2)-7(y+1)-14z=0 \quad |:(-7)$

$\Leftrightarrow x-2+y+1+2z=0$

$\Leftrightarrow x+y+2z-1=0$ (1) éq. cart. de π

2) $\vec{n}(1,1,2)$ = vecteur normal à π = vecteur directeur de d

$(2): \begin{cases} x=7+k \\ y=-4+k \\ z=5+2k \end{cases} \ (k\in\mathbb{R})$ syst. d'éq. param. de d

(2) dans (1) : $7+k-4+k+10+4k-1=0$

$\Leftrightarrow 6k=-12 \Leftrightarrow k=-2$

Dans (2) : $\begin{cases} x=7-2=5 \\ y=-4-2=-6 \\ z=5-4=1 \end{cases}$

$d\cap\pi=\{I(5,-6,1)\}$

6

3) pos : $y = \lambda$

$$g : \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

point de g : $F(4,0,3)$

vect. dir. de g : $\vec{u}(1,1,-1)$ = vect. dir. de P

$\vec{EF}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est aussi vect. dir. de P

$M(x,y,z) \in P \Leftrightarrow \vec{EM}, \vec{u}, \vec{EF}$ sont coplanaires

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 5 \\ y+2 & 1 & 2 \\ z-1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow 2(x+1) + 2(z-1) - 5(y+2) - 5(z-1) + 2(x+1) - 2(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow 4(x+1) - 7(y+2) - 3(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow 4x + 4 - 7y - 14 - 3z + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 7y - 3z - 7 = 0$ éq. cart. de P