Corrigé 1D Mathématiques I

Question 1 **12 points (3+9)**

Soit $z_0 = bi,\ b \in IR$.

$$P(bi) = 0 \Leftrightarrow 2(bi)^3 - (1+7i)(bi)^2 + (2i-8)\cdot bi + 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow -2b^3 i + b^2 + 7b^2 i - 2b - 8bi + 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b^3 + 7b^2 - 8b + 4 = 0 & (1) \\ b^2 - 2b = 0 & (2) \end{cases}$$

On a : (2) $\Leftrightarrow b = 0$ ou $b = 2$.

Vérifions (1) pour $b = 2$: $-2\cdot 8 + 7\cdot 4 - 8\cdot 2 + 4 \overset{?}{=} 0 \Leftrightarrow -16 + 28 - 16 + 4 \overset{!}{=} 0$

Donc $2i$ est bien une racine de P et $P(z)$ est divisible par $z - 2i$.

Schéma de Horner :

	2	$-1-7i$	$-8+2i$	$4i$
$2i$		$4i$	$6-2i$	$-4i$
	2	$-1-3i$	-2	0

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $2z^2 + (-1-3i)z - 2 = 0$ (*)

$$\Delta = (-1-3i)^2 - 4(-4) = 8 + 6i = (\ldots)^2$$

Posons $u = a + bi$ $(a;b \in IR)$ une racine carrée complexe de $8+6i$.

Alors $\begin{cases} a^2 - b^2 = 8 & (1) \\ 2ab = 6 & (2) \\ a^2 + b^2 = 10 & (3) \end{cases}$

$(3)+(1) \Rightarrow a = \pm 3$;

$(3)-(1) \Rightarrow b = \pm 1$;

a et b sont de même signe.

$\Rightarrow u = \pm(3+i)$.

Solutions de $(*)$ $\quad z_1 = \dfrac{1+3i+3+i}{4} = 1+i$

$$z_2 = \frac{1+3i-3-i}{4} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Finalement $S = \left\{ 2i; 1+i; -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i \right\}$

Question 2 **18 points (8+5+5)**

1) Posons $z_1 = 3+3i$

$|z_1| = 3\sqrt{2}$

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi) \qquad \Rightarrow z_1 = 3\sqrt{2}\, cis\dfrac{\pi}{4}$

Posons $z_2 = 3\sqrt{3}-3i$

$|z_2| = 6$

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{6}\ (2\pi) \qquad \Rightarrow z_2 = 6\,cis\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Alors

$$Z = \frac{\left(3\sqrt{2}\,cis\dfrac{\pi}{4}\right)^{10}}{\left[6cis\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^8} = \frac{3^{10}\cdot 2^5 \cdot cis\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)}{2^8\cdot 3^8 \cdot cis\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)} = \frac{3^2}{2^3}\cdot cis\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{9}{8}cis\left(\frac{23\pi}{6}\right) = \frac{9}{8}cis\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

$$Z = \frac{9}{8}cis\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{9}{8}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{9}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = \frac{9\sqrt{3}}{16}-\frac{9}{16}i.$$

2) Posons $z = a+bi$ avec $(a;b \in IR)$. Alors

$(1-i)\bar{z} = (2+i)z+3$

$\Leftrightarrow (1-i)(a-bi) = (2+i)(a+bi)+3$

$\Leftrightarrow a-bi-ai-b = 2a+2bi+ai-b+3$

$\Leftrightarrow -a-3+i(-3b-2a) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a-3=0 \\ -3b-2a=0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-\dfrac{2}{3}a \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases}$

$S = \{-3+2i\}$

3) Posons $z_1 = -16\sqrt{2} = 16\sqrt{2}cis\pi$

Posons $z_2 = 2-2i$

$|z_2| = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{4}\ (2\pi) \quad \Rightarrow z_2 = 2\sqrt{2}\,cis\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Alors $w = \dfrac{16\sqrt{2}cis\pi}{2\sqrt{2}cis\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{8cis(\pi)}{cis\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)} = 8cis\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

Les racines cubiques de w sont $w_k = 2cis\left(\dfrac{5\pi}{12} + k\cdot\dfrac{2\pi}{3}\right)$ avec $k \in \{0;1;2\}$

$w_0 = 2cis\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) \qquad w_1 = 2cis\left(\dfrac{13\pi}{12}\right) \qquad w_2 = 2cis\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$

Question 3 15 points

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & m \\ 1 & -m & 2 \\ 2 & m & m \end{vmatrix} = -m^2 - 8 + m^2 + 2m^2 - 2m + 2m = 2m^2 - 8 = 2(m-2)(m+2)$$

(S) est de Cramer $\Leftrightarrow \det(S) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ et $m \neq -2$

1er cas : $m \in IR \setminus \{2;-2\}$

$$\det(S_x) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & m \\ 1 & -m & 2 \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = -m^2 - 4 + m^2 + m^2 - 2m + 2m = m^2 - 4$$

$$\det(S_y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = m + 4 + m - 2m - 2 - m = -m + 2$$

$$\det(S_z) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix} = -m - 4 + m + 2m - m + 2 = m - 2$$

$$x=\frac{\det(S_x)}{\det(S)}=\frac{(m-2)(m+2)}{2(m-2)(m+2)}=\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{\det(S_y)}{\det(S)}=\frac{-m+2}{2(m-2)(m+2)}=\frac{-1}{2(m+2)}$$

$$z=\frac{\det(S_z)}{\det(S)}=\frac{m-2}{2(m-2)(m+2)}=\frac{1}{2(m+2)}$$

Donc $\forall m\in IR\setminus\{2;-2\}$ le système admet une solution unique

$$S=\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{2(m+2)};\frac{1}{2(m+2)}\right)\right\}$$

Le système est formé des équations cartésiennes de trois plans sécants en un point.

<u>**2^{e} cas :**</u> $m=2$

$$(S)\begin{cases}x-2y+2z=1\\x-2y+2z=1\\2x+2y+2z=1\end{cases}\underset{\substack{E_2/E_2-E_1\\E_3/E_3-2E_1}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x-2y+2z=1\\0=0\\6y-2z=-1\end{cases}$$

En posant $z=\alpha$ $(\alpha\in IR)$ on obtient $\begin{cases}x=-\frac{4}{3}\alpha+\frac{2}{3}\\y=\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{6}\\z=\alpha\end{cases}$

Donc si $m=2$ le système est simplement indéterminé.

$$S=\left\{\left(-\frac{4}{3}\alpha+\frac{2}{3};\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{6};\alpha\right)/\alpha\in IR\right\}$$

Le système est formé des équations cartésiennes de trois plans qui se coupent suivant la droite passant par le point $A\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{6};0\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(-\frac{4}{3};\frac{1}{3};1\right)$.

3e cas : $m=-2$

$$(S)\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+2y+2z=1 \\ 2x-2y-2z=1 \end{cases} \underset{\substack{E_2/E_2-E_1 \\ E_3/E_3-2E_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ 4y+4z=0 \\ 2y+2z=-1 \end{cases} \underset{\substack{E_2/\frac{1}{4}E_2 \\ E_3/\frac{1}{2}E_3}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ y+z=0 \\ y+z=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc si $m=-2$ le système est impossible.

$S=\varnothing$

Le système est formé des équations cartésiennes de trois plans n'ayant aucun point commun.

Question 4 **11 points (8+3)**

1) $M(x;y;z)\in\pi_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n} \Leftrightarrow (x+2)\cdot 3+(y-1)\cdot(-2)+(z-4)\cdot 1=0$

$\Leftrightarrow 3x-2y+z+4=0$

Ainsi $\pi_1 \equiv 3x-2y+z+4=0$.

2) $\pi_1 // \pi_2 \Rightarrow \pi_2 \equiv 3x-2y+z+d=0$

$B(-1;0;2)\in\pi_2 \Leftrightarrow -3+0+2+d=0 \Leftrightarrow d=1$.

Ainsi $\pi_2 \equiv 3x-2y+z+1=0$.

Posons $y=\alpha \ (\alpha\in IR)$

$z=\beta \ (\beta\in IR)$

Alors $3x-2\alpha+\beta+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\alpha-\frac{1}{3}\beta-\frac{1}{3}$.

$$\text{Finalement } \pi_2 \equiv \begin{cases} x= & \frac{2}{3}\alpha-\frac{1}{3}\beta-\frac{1}{3} \\ y= & \alpha \\ z= & \beta \end{cases} \qquad (\alpha;\beta\in IR)\ .$$

π_2 est le plan passant par le point $C\left(-\frac{1}{3};0;0\right)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}_2\left(\frac{2}{3};1;0\right)$ et $\vec{v}_2\left(-\frac{1}{3};0;1\right)$.

3) Posons $z=\alpha \ (\alpha \in IR)$

Alors $y=1+\alpha$

et $2x=-y+z+4 \Leftrightarrow 2x=-1-\alpha+\alpha+4 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Finalement $d \equiv \begin{cases} x = & \frac{3}{2} \\ y = & 1+\alpha \\ z = & \alpha \end{cases} \ (\alpha \in IR)$.

d est la droite passant par le point $D\left(\frac{3}{2};1;0\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\ (0;1;1)$.

4) $M(x;y;z) \in d \cap \pi_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+z+4=0 & (1) \\ x=\frac{3}{2} & (2) \\ y=1+\alpha & (3) \\ z=\alpha & (4) \end{cases}$

$(2),(3)$ et (4) dans (1): $\frac{9}{2}-2-2\alpha+\alpha+4=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{13}{2}$

$\alpha=\frac{13}{2}$ dans $(2),(3)$ et $(4) \Rightarrow$ $x=\frac{3}{2}$ $\qquad y=\frac{15}{2}$ $\qquad z=\frac{13}{2}$

Ainsi $d \cap \pi_1 = \{I\}$ avec $I\left(\frac{3}{2};\frac{15}{2};\frac{13}{2}\right)$.