Section D - corrigé de l'épreuve en Mathématiques I

Question 1 (15pts)

$P(z) = z^3 - (1+4i)z^2 - (7-13i)z + 22 + 6i$

- Soit $z = bi$ ($b \in \mathbb{R}$) une racine imaginaire pure de P.

$$P(bi) = 0 \Leftrightarrow (bi)^3 - (1+4i)(bi)^2 - (7-13i)bi + 22 + 6i = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^3 i + (1+4i)b^2 - 7bi - 13b + 22 + 6i = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^3 i + b^2 + 4b^2 i - 7bi - 13b + 22 + 6i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 13b + 22 = 0 & (1) \\ -b^3 + 4b^2 - 7b + 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Delta = 81$ $b_1 = 2$ $b_2 = 11$
Dans (2) : $-2^3 + 16 - 14 + 6 = 0$
$-1331 + 484 - 77 + 6 \neq 0$ **(4pts)**

Donc $\boxed{z = 2i}$ est une solution de $P(z) = 0$.

- Schéma de Horner :

	1	$-1-4i$	$-7+13i$	$22+6i$
$2i$		$2i$	$4-2i$	$-22-6i$
	1	$-1-2i$	$-3+11i$	0

Donc $P(z) = (z-2i)(z^2 - (1+2i)z - 3 + 11i)$ **(2pts)**

- Reste à résoudre $z^2 - (1+2i)z - 3 + 11i = 0$

$\boxed{\Delta = (1+2i)^2 - 4(-3+11i) = 9 - 40i}$ **(2pts)**

- Soit $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) une racine carrée de Δ

Ainsi on obtient : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 & (1) \\ 2xy = -40 & (2) \\ x^2 + y^2 = 41 & (3) \end{cases}$

$$(1) + (3): \ 2x^2 = 50 \Leftrightarrow x = 5 \ ou \ x = -5$$

$$(1) - (3): \ -2y^2 = -32 \Leftrightarrow y = 4 \ ou \ y = -4$$

(2) implique que x *et* y sont de signes contraires.

Donc $\delta_1 = 5 - 4i$ *et* $\delta_2 = -5 + 4i$ **(4pts)**

- D'où $\boxed{z_1 = \frac{1+2i+5-4i}{2} = 3 - i}$ *et* $\boxed{z_2 = \frac{1+2i-5+4i}{2} = -2 + 3i}$

Finalement $\boxed{S = \{2i; 3-i; -2+3i\}}$ **(3pts)**

Question 2 **((7+4)+4=15pts)**

1) a) $\boxed{z_1 = \frac{-4i}{5\sqrt{2}(1-i)} = \frac{-4i(1+i)}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{5}i}$

- $r_1 = |z_1| = \frac{2}{5}$

$\cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin\varphi_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}\ (mod\ 2\pi)$

Donc $\boxed{z_1 = \frac{2}{5} cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ **(4pts)**

- $\boxed{z_2 = \frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+2i} = \frac{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}-2i)}{2+4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i}$

$r_2 = |z_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\varphi_2 = 0$ $\quad \sin\varphi_2 = -1$ d'où $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}\ (mod\ 2\pi)$

Donc $\boxed{z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ **(3pts)**

b) $\boxed{z_3 = \frac{(z_1)^3}{(z_2)^2} = \frac{\left(\frac{2}{5}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^3}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2} = \frac{\frac{8}{125}cis\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}{\frac{1}{2}cis\left(-\pi\right)} = \frac{16}{125}cis\left(-\frac{3\pi}{4}+\pi\right) = \frac{16}{125}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$= \frac{16}{125}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \boxed{\frac{8\sqrt{2}}{125} + \frac{8\sqrt{2}}{125}i}$ (4 pts)

2) $\boxed{-3\, cis\left(\frac{3\pi}{4}\right) = cis\left(\pi\right) \cdot 3cis\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3cis\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 3cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Les racines cubiques sont données par $r_k = \sqrt[3]{3}cis\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)$, $k \in \{0\,;1\,;2\}$

Donc $\boxed{r_0 = \sqrt[3]{3}cis\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$, $\boxed{r_1 = \sqrt[3]{3}cis\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$, $\boxed{r_2 = \sqrt[3]{3}cis\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$ (4 pts)

Question 3 **(16pts)**

$\begin{cases} x + my + z = -3 \\ x + y + mz = 4 \\ x - y - mz = -3 \end{cases}$ $\quad$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & -m \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix} = -m + m^2 - 1 - 1 + m + m^2 = 2m^2 - 2 = 2(m-1)(m+1)$$

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow 2(m-1)(m+1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ et $m \neq -1$ **(3pts)**

*$\boxed{\text{si } m \neq 1 \text{ et } m \neq -1}$

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} -3 & m & 1 \\ 4 & 1 & m \\ -3 & -1 & -m \end{vmatrix} = \cancel{3m} - 3m^2 - 4 + 3 \cancel{- 3m} + 4m^2 = (m-1)(m+1)$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & m \\ 1 & -3 & -m \end{vmatrix} = -4m - 3m - 3 - 4 \cancel{+ 3m} \cancel{- 3m} = -7m - 7 = -7(m+1)$$

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & m & -3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \cancel{-3} + 4m \cancel{+ 3} + 3 + 4 + 3m = 7m + 7 = 7(m+1)$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{(m-1)(m+1)}{2(m-1)(m+1)} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-7(m+1)}{2(m-1)(m+1)} = \frac{-7}{2(m-1)}$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{7(m+1)}{2(m-1)(m+1)} = \frac{7}{2(m-1)}$$

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{1}{2}; \frac{-7}{2(m-1)}; \frac{7}{2(m-1)}\right)\right\}}$$

Si $m \neq 1$ et $m \neq -1$,les 3 plans se coupent en un point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{-7}{2(m-1)}; \frac{7}{2(m-1)}\right)$.

(7pts)

*$\boxed{\text{si } m = -1}$

le système s'écrit $\begin{cases} x - y + z = -3 \ (1) \\ x + y - z = 4 \ (2) \quad | \ (2) + (1) \\ \cancel{x - y + z = -3 \ (3)} \end{cases}$ $\iff \begin{cases} x - y + z = -3 \\ 2x = 1 \end{cases}$

(1): $x = y - z - 3$ $(1)'$ $\iff \begin{cases} z = y - \frac{7}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Dans (2): $2y - 2z = 7$ $(2)'$ Dans (3): $-3 = -3$

$\iff \begin{cases} y = z + \frac{7}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Système indéterminé : posons $z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

Dans $(2)'$: $2y = 7 + 2\alpha \Leftrightarrow y = \alpha + \frac{7}{2}$

Dans $(1)'$: $x = \alpha + \frac{7}{2} - \alpha - 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$$S = \left\{\left(\frac{1}{2}; \alpha + \frac{7}{2}; \alpha\right) | \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

$= \left\{ \left(\frac{1}{2} , \alpha , \alpha - \frac{7}{2} \right) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Si $m=-1$, les 3 plans se coupent en une droite de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ passant par le point $A\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2};0\right)$. $\left(A'\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right) \right)$ **(4pts)**

*si $\boxed{m=1}$

le système s'écrit $\begin{cases} x+y+z=-3 \ (1) \\ x+y+z=4 \ (2) \\ x-y-z=-3 \ (3) \end{cases}$ impossible

$$(1): x=-3-y-z$$

Dans (2): $-3=4$ impossible

$S=\emptyset$

Si $m=1$, les 3 plans n'ont aucun point en commun. (2 str. parallèles) **(2pts)**

Question 4 (6+2+2+2+2=14pts)

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-5\\-4\end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ (1)

$\nexists k\in\mathbb{R}$ *tel que* $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$$M(x;y;z)\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}\ coplanaires$$

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC})=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -3 \\ y-2 & 4 & -5 \\ z-1 & 1 & -4 \end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow -11x-11y+22z+11=0 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x+y-2z-1=0} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\alpha+2\beta+1 \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases} \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

$$M(x;y;z)\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}\ coplanaires$$

$$\Leftrightarrow \exists k,l\in\mathbb{R}\ tel\ que\ \overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2k-3l+1 \\ y=4k-5l+2 \\ z=k-4l+1 \end{cases}$$

2) Comme $\pi'\parallel\pi$, un vecteur normal de π est aussi un vecteur normal de π'.

Donc $\pi'\equiv x+y-2z+d=0$

Or $D(1;0;-1)\in\pi' \Leftrightarrow 1+2+d=0 \Leftrightarrow d=-3$

Finalement $\boxed{\pi'\equiv x+y-2z-3=0}$

3) Comme $d \perp \pi$, un vecteur directeur de d est le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ de π.

$$\begin{aligned} M(x;y;z) \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{EM} \text{ et } \vec{n} \text{ colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{EM} = k\vec{n} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k-1 \\ y = k-3 \\ z = -2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

(2)

4) $H(3;y_H;-5) \in d \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = k-1 \\ y_H = k-3 \\ -5 = -2k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ y_H = k-3 \\ k = 3 \end{cases}$ impossible (2)

Donc il n'existe pas de point d'abscisse 3 et de cote -5 appartenant à d.

5) Pour trouver les coordonnées du point I, il faut résoudre le système

$$\begin{cases} x = k-1 \ (1) \\ y = k-3 \ (2) \\ z = -2k+1 \ (3) \\ x+y-2z-1 = 0 \ (4) \end{cases}$$

$(1), (2) \text{ et } (3) \text{dans } (4)\colon k-1+k-3-2(-2k+1)-1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{7}{6}}$ (2)

Donc $\begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = -\frac{11}{6} \\ z = -\frac{4}{3} \end{cases}$ $I\left(\frac{1}{6}; -\frac{11}{6}; -\frac{4}{3}\right)$.
