LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2020
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques 1	**C**	*Durée de l'épreuve :* 2h05 *Date de l'épreuve :* 09 juin 2020

Partie 1

I. Nombres complexes. *12+(6+4)+4+4=30 points*

1) P admet une racine imaginaire pure si et seulement si $\exists b \in \mathbb{R}$ tel que $P(ib) = 0$.

On a: $P(ib) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad i \cdot (ib)^3 - (3+i) \cdot (ib)^2 - (5-2i) \cdot (ib) - 8 - 14i = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad b^3 + 3b^2 + ib^2 - 5ib - 2b - 8 - 14i = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad b^3 + 3b^2 - 2b - 8 + i\left(b^2 - 5b - 14\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b^3 + 3b^2 - 2b - 8 = 0 \\ b^2 - 5b - 14 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b^3 + 3b^2 - 2b - 8 = 0 \ (1) \\ \Delta = 81; \sqrt{\Delta} = 9; \alpha = 7; \beta = -2 \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad -2 \text{ dans } (1) \Rightarrow 0 = 0 \\
&\Rightarrow \quad -2i \text{ est une racine imaginaire pure de } P
\end{aligned}$$

Horner:

	i	$-3-i$	$-5+2i$	$-8-14i$
$-2i$		2	$-2+2i$	$8+14i$
	i	$-1-i$	$-7+4i$	0

donc $P(z) = (z+2i) \cdot \left(iz^2 - (1+i)z - 7 + 4i\right)$

ainsi $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -2i$ ou $iz^2 - (1+i)z - 7 + 4i = 0$

On a $\Delta = (1+i)^2 - 4i(4i-7) = 2i + 16 + 28i = 16 + 30i$

donc il faut résoudre l'équation $Z^2 = 16 + 30i$ on a $|16 + 30i| = 34$ donc en posant $Z = x + iy$ avec $x; y \in \mathbb{R}$ on a:

$$Z^2 = 16 + 30i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ 2xy = 30 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ xy = 15 \\ y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ ou } x = -5 \\ xy = 15 \text{ donc } x \text{ et } y \text{ ont même signe} \\ y = 3 \text{ ou } y = -3 \end{cases}$$

donc $Z^2 = 16 + 30i \iff Z = 5 + 3i$ ou $Z = -5 - 3i$

ainsi $iz^2 - (1+i)z - 7 + 4i = 0$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 + i + 5 + 3i}{2i} = 2 - 3i \text{ ou } z = \frac{1 + i - 5 - 3i}{2i} = -1 + 2i$$

donc $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -2i$ ou $z = 2 - 3i$ ou $z = -1 + 2i$

2) Soit $Z=\dfrac{10\sqrt{3}+6i}{\sqrt{3}+2i}-\dfrac{14+14\sqrt{3}i}{2-\sqrt{3}i}$

a) $Z=\dfrac{10\sqrt{3}+6i}{\sqrt{3}+2i}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}-2i}-\dfrac{14+14\sqrt{3}i}{2-\sqrt{3}i}\cdot\dfrac{2+\sqrt{3}i}{2+\sqrt{3}i}$

$=\dfrac{42-14i\sqrt{3}}{7}-\dfrac{-14+42i\sqrt{3}}{7}=6-2i\sqrt{3}-\left(-2+6i\sqrt{3}\right)=8-8i\sqrt{3}$

$Z=8-8\sqrt{3}i\in IVQ \qquad |Z|=\left|8-8\sqrt{3}i\right|=16$

$\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\iff \theta=-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ donc $Z=16\cdot cis\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

b) Il faut résoudre l'équation $z^4=Z$

$z^4=16\cdot cis\left(-\frac{\pi}{3}\right)\iff z_k=2\cdot cis\left(-\frac{\pi}{12}+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\qquad k\in\{0;1;2;3\}$

$z_0=2\cdot cis\left(-\frac{\pi}{12}\right);z_1=2\cdot cis\left(\frac{5}{12}\pi\right);z_2=2\cdot cis\left(\frac{11}{12}\pi\right);z_3=2\cdot cis\left(\frac{17}{12}\pi\right)$

3) $Z=\dfrac{(1+i)^{2020}}{1+i^{2020}}=\dfrac{\left((1+i)^2\right)^{1010}}{1+\left(i^2\right)^{1010}}=\dfrac{(2i)^{1010}}{1+(-1)^{1010}}$

$=\dfrac{2^{1010}\left(i^2\right)^{505}}{2}=-2^{1009}=2^{1009}\cdot cis\,(\pi)$

4) $Z=\dfrac{\left(2\cdot cis\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^4\cdot\left(\sqrt{2}\cdot cis\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^5}{\left(2\cdot cis\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^5}=\dfrac{2^4\cdot cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)^5\cdot cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{2^5\cdot cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$

$=\dfrac{2^6\sqrt{2}\cdot cis\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)}{2^5}=2\sqrt{2}\cdot cis\left(\frac{7}{4}\pi\right)=2\sqrt{2}\cdot cis\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2-2i$

Partie2

II. Nombres complexes. *5+10=15 points*

1) $(1-i)\cdot\overline{z}=(2+i)\cdot z+3$ on pose $z=x+iy$ avec $x;y\in\mathbb{R}$

$(1-i)\cdot(x-iy)=(2+i)\cdot(x+iy)+3$

$\iff x-iy-ix-y=2x+2iy+ix-y+3$

$\iff\begin{cases}x-y=2x-y+3\\ -x-y=x+2y\end{cases}\iff\begin{cases}x=-3\\ y=2\end{cases}$

donc $\mathcal{S}=\{-3+2i\}$

2) a) $z_1=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^2}{\sqrt{3}-i}=\dfrac{\left(-2+2i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}$

$=\dfrac{-4\sqrt{3}+4i}{4}=-\sqrt{3}+i\in II^{\text{éme}}Q$

$|z_1|=2\qquad\begin{cases}\cos\theta_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_1=\frac{1}{2}\end{cases}\Longrightarrow\theta_1=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}\qquad[2\pi]$

b) $Z=\dfrac{2cis\frac{5\pi}{6}}{\sqrt{2}cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}cis\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}cis\frac{13\pi}{12}$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$

$Z=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i}=\dfrac{\left(-\sqrt{3}+i\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$$= \frac{-\sqrt{3}+i-i\sqrt{3}-1}{2} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

c) $\sqrt{2}\cos\frac{13\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \iff \sqrt{2}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\iff -\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \iff \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

III. Géométrie analytique de l'espace. *(1+2+1+2+4+5)=15 points*

1) $A; B$ et C alignés $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} = k \cdot \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2k & \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{2} \\ 1 = 3k & \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{3} \\ -2 = k \end{cases}$$

impossible donc les trois points $A; B; C$ ne sont pas alignés et déterminent un plan.

2) $M(x; y; z) \in \Pi \iff \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -2 \\ y+1 & 1 & 3 \\ z & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 7x + 5y - z - 9 = 0$

3) $D \in \Pi \iff 7\cdot(-3) + 5\cdot(-2) - 2 - 9 = 0$ impossible donc $D \notin \Pi$

4) $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à α

$M(x; y; z) \in d(D; \vec{n}) \iff \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}x+3\\y+2\\z-2\end{pmatrix} = k \cdot \vec{n}\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x = 4k-3 \\ y = 3k-2 \\ z = k+2 \end{cases} \text{avec } k \in \mathbb{R} \qquad \text{système d'équations paramétrées de } d$$

5) $\Pi \cap d : \begin{cases} x = 4k-3 \\ y = 3k-2 \\ z = k+2 \\ 7x+5y-z-9=0 \end{cases}$

$(1); (2); (3)$ dans $(4) \Rightarrow 7(4k-3) + 5(3k-2) - (k+2) - 9 = 0$

$\Leftrightarrow 42k - 42 = 0 \Leftrightarrow k = 1$

donc $\Pi \cap d = \{E(1; 1; 3)\}$

6) $\begin{cases} 3x+2y+z=4 \\ x+2y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x+2y \\ 3x+2y+x+2y=4 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x+2y \\ 4x+4y=4 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} z = x+2y \\ x = 1-y \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1+y \\ x = 1-y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1-k \\ y = k \\ z = 1+k \end{cases}$$

donc $\mathcal{S} = \{(1-k; k; 1+k), k \in \mathbb{R}\}$

$\pi_1 \cap \pi_2 = d$ avec $A\,(1;0;1) \in d$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de d.

IV. Systèmes linéaires. *15 points*

1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a+1 & a & 1 \end{vmatrix} = a - a^3 = -a\,(a-1)\,(a+1)$

$|A| = 0 \iff a = -1$ ou $a = 0$ ou $a = 1$

2) Si $a = 0$

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ x+z &= 0 \\ x+z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y &= 0 \\ z-y &= 0 \\ z-y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y &= 0 \\ z-y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

$\mathcal{S} = \{(-\alpha;\alpha;\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

3 plans qui se coupent en une droite d avec $O\,(0;0;0) \in d$

et $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vec. dir. de d

Si $a = 1$

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x+y+z &= 2 \\ 2x+y+z &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ 0 &= 2 \\ x &= 1 \end{cases} \qquad \mathcal{S} = \emptyset$$

3 plans qui n'ont aucun point en commun

3) Si $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1;1\}$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a\,(1-a)\,(1+a)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 2a & a & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{-a\,(1-a^2)}{a\,(1-a)\,(1+a)} \\ &= \frac{a\,(a-1)\,(a+1)}{a\,(1-a)\,(1+a)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{a\,(1-a)\,(1+a)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 2a & 1 \\ a+1 & a & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{a - a^2 - 2a^3}{a\,(1-a)\,(1+a)} \\ &= \frac{-a\,(a+1)\,(2a-1)}{a\,(1-a)\,(1+a)} \\ &= \frac{2a-1}{a-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{a\,(1-a)\,(1+a)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2a \\ a+1 & a & a \end{vmatrix} \\
&= \frac{a+a^2}{a\,(1-a)\,(1+a)} \\
&= \frac{a\,(a+1)}{a\,(1-a)\,(1+a)} \\
&= \frac{1}{1-a}
\end{aligned}$$

$\mathcal{S} = \left\{ \left(-1; \frac{2a-1}{a-1}; \frac{1}{1-a} \right) \right\}$

3 plans qui se coupent en un et un seul point

V. Probabilités. *(3+3+3+3)+3=15 points*

1) Avec ordre, sans répétition donc arrangements 3 boules parmi 12 boules.

   a) $P = \dfrac{A_6^3}{A_{12}^3} = \dfrac{120}{1320} = \dfrac{1}{11}$

   b) $P = \dfrac{\overset{\text{ordre des couleurs}}{3!} \cdot A_4^1 \cdot A_6^1 \cdot A_2^1}{A_{12}^3} = \dfrac{288}{1320} = \dfrac{12}{55}$

   c) $P = \dfrac{A_4^3 + A_6^3}{A_{12}^3} = \dfrac{24+120}{1320} = \dfrac{144}{1320} = \dfrac{6}{55}$ (3 rouges ou 3 noires)

   d) $P = \dfrac{A_4^2 \cdot A_8^1 \cdot \overset{\text{places de non rouge}}{3}}{A_{12}^3} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \dfrac{12}{55}$

2) Avec ordre, avec répétition donc puissances. 3 boules parmi 12 boules.

   $P = \left(\dfrac{4}{12}\right)^3 + \left(\dfrac{6}{12}\right)^3 + \left(\dfrac{2}{12}\right)^3 = \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{216} = \dfrac{1}{6}$

VI. Combinatoire. *(2+2+4+4+3)=15 points*

1) Sans ordre, sans répétition donc combinaisons.
   1 gardien et 6 joueurs de champ $= C_3^1 \cdot C_{13}^6 = 5148$.
2) Sans ordre, sans répétition donc combinaisons.
   $C_2^1 \cdot C_9^6 = 2 \cdot 84 = 168$.
3) Sans ordre, sans répétition donc combinaisons.
   le gardien peut être étranger ou luxembourgeois.
   $C_1^1 \cdot C_4^2 \cdot C_9^4 + C_2^1 \cdot C_4^3 \cdot C_9^3 = 756 + 672 = 1428$.
4) Sans ordre, sans répétition donc combinaisons.
   le gardien peut être Misch ou un autre.
   $C_1^1 \cdot C_{11}^6 + C_2^1 \cdot C_{13}^6 = 462 + 3432 = 3894$.
5) Avec ordre, sans répétition donc arrangements.
   $A_3^3 \cdot A_{13}^{13} = 3! \cdot 13! = 6 \cdot 6227020800 = 37362124800$