LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2020
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques I	**B**	*Durée de l'épreuve :* 3 *Date de l'épreuve :* 18/09/2020

Question I ((9+4)+3+4 = 20 points)

1) a) $z^4 - z^3 + (7+4\mathrm{i})z^2 - (11+6\mathrm{i})z + 30\mathrm{i} = 0$

Soit $b\mathrm{i}$ ($b \in \mathbb{R}$) une solution imaginaire pure. Alors:

$$\underbrace{(b\mathrm{i})^4}_{=b^4} - \underbrace{(b\mathrm{i})^3}_{=-b^3 i} + (7+4\mathrm{i})\underbrace{(b\mathrm{i})^2}_{-b^2} - (11+6\mathrm{i})\cdot b\mathrm{i} + 30\mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 7b^2 + 6b = 0 & (1) \\ b^3 - 4b^2 - 11b + 30 = 0 & (2) \end{cases}$$

Résolution de (2), avec la racine $b = 2$:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -4 & -11 & 30 & \\ & 2 & -4 & -30 & \\ & & & & \cdot 2 \\ \hline 1 & -2 & -15 & 0 & \end{array}$$

D'où: $(2) \Leftrightarrow (b-2)(b^2 - 2b - 15) = 0 \overset{\Delta=64=8^2}{\Leftrightarrow} b = 2 \text{ ou } b = -3 \text{ ou } b = 5$.

Seules les solutions $b = 2$ et $b = -3$ de (2) conviennent dans (1). Les solutions imaginaires pures sont donc $2\mathrm{i}$ et $-3\mathrm{i}$.

Division de $z^4 - z^3 + (7+4\mathrm{i})z^2 - (11+6\mathrm{i})z + 30\mathrm{i}$ par $z - 2\mathrm{i}$:

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & -1 & 7+4\mathrm{i} & -11-6\mathrm{i} & 30\mathrm{i} & \\ & 2\mathrm{i} & -4-2\mathrm{i} & -4+6\mathrm{i} & -30\mathrm{i} & \\ & & & & & \cdot 2\mathrm{i} \\ \hline 1 & -1+2\mathrm{i} & 3+2\mathrm{i} & -15 & 0 & \end{array}$$

$$z^4 - z^3 + (7+4\mathrm{i})z^2 - (11+6\mathrm{i})z + 30\mathrm{i} = (z - 2i)[z^3 + (-1+2\mathrm{i})z^2 + (3+2\mathrm{i})z - 15]$$

Division de $z^3 + (-1+2\mathrm{i})z^2 + (3+2\mathrm{i})z - 15$ par $z + 3\mathrm{i}$:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & -1+2\mathrm{i} & 3+2\mathrm{i} & -15 & \\ & -3\mathrm{i} & -3+3\mathrm{i} & 15 & \\ & & & & \cdot(-3\mathrm{i}) \\ \hline 1 & -1-\mathrm{i} & 5\mathrm{i} & 0 & \end{array}$$

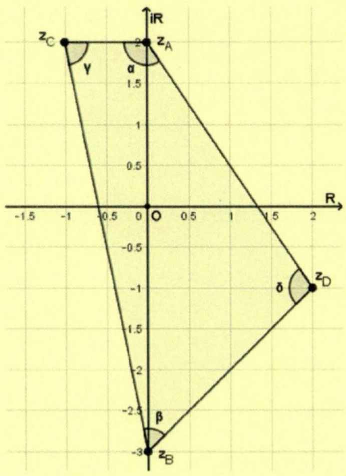
$$z^3 + (-1+2\mathrm{i})z^2 + (3+2\mathrm{i})z - 15 = (z+3\mathrm{i})[z^2 + (-1-\mathrm{i})z + 5\mathrm{i}]$$

Racines du quotient $z^2 + (-1-\mathrm{i})z + 5\mathrm{i}$:

$$\Delta = (-1-\mathrm{i})^2 - 4\cdot 1\cdot 5\mathrm{i} = 1 + 2\mathrm{i} - 1 - 20\mathrm{i} = -18\mathrm{i} = \ldots = (-3+3\mathrm{i})^2$$

$$z_1 = \frac{1+\mathrm{i}-(-3+3\mathrm{i})}{2} = 2-\mathrm{i};\ z_2 = \frac{1+\mathrm{i}+(-3+3\mathrm{i})}{2} = -1+2\mathrm{i}$$

D'où: $S = \{2\mathrm{i}; -3\mathrm{i}; 2-\mathrm{i}; -1+2\mathrm{i}\}$.



b) On a $z_A = 2i; z_B = -3i; z_C = -1+2i; z_D = 2-i$.

Angle en A: $\dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{2-i-2i}{-1+2i-2i} = \dfrac{2-3i}{-1} = -2+3i \notin i\mathbb{R}$.

Ainsi, l'angle en A n'est pas droit.

Angle en B: $\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \dfrac{-1+2i+3i}{2-i+3i} = \dfrac{-1+5i}{2+2i} \cdot \dfrac{2-2i}{2-2i} = \dfrac{8+12i}{8} \notin i\mathbb{R}$.

Ainsi, l'angle en B n'est pas droit.

Angle en C: $\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \dfrac{2i+1-2i}{-3i+1-2i} = \dfrac{1}{1-5i} \cdot \dfrac{1+5i}{1+5i} = \dfrac{1+5i}{26} \notin i\mathbb{R}$.

Ainsi, l'angle en C n'est pas droit.

Angle en D: $\dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D} = \dfrac{-3i-2+i}{2i-2+i} = \dfrac{-2-2i}{-2+3i} \cdot \dfrac{-2-3i}{-2-3i} = \dfrac{-2+10i}{13} \notin i\mathbb{R}$.

Ainsi, l'angle en D n'est pas droit.

2) $z^5 = \underbrace{32}_{=32\,\text{cis}0} \Leftrightarrow z$ est racine 5$^{\text{ème}}$ de 32

Racines 5$^{\text{èmes}}$ de 32: $z_k = \sqrt[5]{32}\ \text{cis}\dfrac{0+k\cdot 2\pi}{5} = 2\ \text{cis}\dfrac{k\cdot 2\pi}{5} \quad (k \in \{0;1;2;3;4\})$.

D'où: $S = \left\{2; 2\text{cis}\dfrac{2\pi}{5}; 2\text{cis}\dfrac{4\pi}{5}; 2\text{cis}\dfrac{6\pi}{5}; 2\text{cis}\dfrac{8\pi}{5}\right\}$.

Produit des racines:

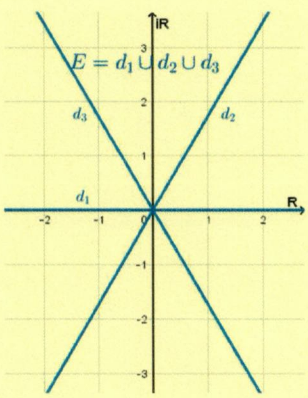
$$2 \cdot 2\text{cis}\frac{2\pi}{5} \cdot 2\text{cis}\frac{4\pi}{5} \cdot 2\text{cis}\frac{6\pi}{5} \cdot 2\text{cis}\frac{8\pi}{5} = 32\text{cis}(\frac{2\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}+\frac{6\pi}{5}+\frac{8\pi}{5}) = 32\text{cis}(4\pi) = 32$$

3) Posons $z = x+iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$). Alors:

$$z' = z^3 - 1 = (x+iy)^3 - 1 = x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 - 1 = (x^3 - 3xy^2 - 1) + (3x^2y - y^3)i$$

$M(z) \in E \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow 3x^2y - y^3 = 0 \Leftrightarrow y(3x^2 - y^2) = 0 \Leftrightarrow y(\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3}x + y) = 0$

Ainsi $E = \underbrace{(d_1 \equiv y = 0)}_{\text{axe réel}} \cup (d_2 \equiv y = \sqrt{3}x) \cup (d_3 \equiv y = -\sqrt{3}x)$.

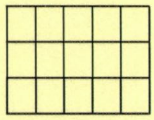


Question II (2+(1,5+1+1,5+1)+(2+2)+(2,5+1,5+2+4) = 21 points)

1) $(4x^2+\dfrac{1}{2x})^{12}=\sum\limits_{k=0}^{12}C_{12}^k(4x^2)^{12-k}\left(\dfrac{1}{2x}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{12}C_{12}^k4^{12-k}x^{24-2k}\dfrac{1}{2^kx^k}=\sum\limits_{k=0}^{12}C_{12}^k2^{24-3k}x^{24-3k}$

Le terme constant s'obtient pour $24-3k=0 \Leftrightarrow k=8$. Il vaut $C_{12}^8 2^0x^0=495$.

2)



a) Il faut choisir 5 cases parmi 15 pour les 5 jetons. Il y a donc $C_{15}^5=3003$ répartitions différentes.

b) Il faut choisir 5 cases parmi 15 pour les 5 jetons, comme dans a) (3003 choix) <u>et</u> 1 permutation des 5 jetons parmi les 5 cases choisies (5! = 120 choix). Il y a donc 3003·120 = 360360 répartitions différentes.

c) Il faut choisir 1 case parmi 3 dans la 1ère colonne <u>et</u> 1 case parmi 3 dans la 2ème colonne <u>et</u> 1 case parmi 3 dans la 3ème colonne <u>et</u> 1 case parmi 3 dans la 4ème colonne <u>et</u> 1 case parmi 3 dans la 5ème colonne. Il y a donc 3^5 = 243 répartitions différentes.

d) Il faut choisir dans chaque colonne une case, comme dans c) (243 choix) <u>et</u> 1 permutation des 5 jetons parmi les 5 cases choisies (5! = 120 choix). Il y a donc 243·120 = 29160 répartitions différentes.

3) a) Soient A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K et L les 12 places.

On note pour chaque personne la lettre du fauteuil occupé, p.ex. (A,B,K,J,D).

Le nombre de répartitions est donc l'ensemble des listes ordonnées de 5 lettres <u>distinctes</u> choisies parmi 12 (arrangements sans répétition). Il y a donc $A_{12}^5=95040$ répartitions possibles.

b) Il faut choisir une position de départ pour le bloc des 5 personnes parmi 8 (8 choix) <u>et</u> une permutation des 5 personnes à l'intérieur de ce bloc (5! = 120 choix). Il y a donc 8·120 = 960 répartitions possibles.

4) L'expérience est un schéma de Bernoulli avec 50 épreuves et probabilité de succès $^1/_{100}$ (succès: « le virus est détecté dans l'échantillon »).

Le nombre de succès X admet donc la loi binomiale $B_{50;1/100}$.

a) $P(X\le 3)=\sum\limits_{k=0}^{3}P(X=k)=\sum\limits_{k=0}^{3}C_{50}^k\left(\frac{1}{100}\right)^k\left(\frac{99}{100}\right)^{50-k}\approx 99{,}84\%$

b) Espérance de X: $E(X)=50\cdot\dfrac{1}{100}=\dfrac{1}{2}=0{,}5$.

Variance de X: $V(X)=50\cdot\dfrac{1}{100}\cdot\dfrac{99}{100}=\dfrac{99}{200}$. Ecart-type de X: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\dfrac{3\sqrt{22}}{20}\approx 0{,}70$.

c) Le schéma de Bernoulli a maintenant n épreuves. Le nombre de succès X admet donc la loi binomiale $B_{n;1/100}$. D'où:

$P(\text{le virus est détecté dans au moins un échantillon})>98\%$

$\Leftrightarrow P(X\ge 1)>0{,}98$

$\Leftrightarrow 1-P(X=0)>0{,}98$

$\Leftrightarrow P(X=0)<0{,}02$

$\Leftrightarrow C_n^0(\frac{1}{100})^0(\frac{99}{100})^n<0{,}02$

$\Leftrightarrow (\frac{99}{100})^n<0{,}02$

$\Leftrightarrow n\boxed{>}\log_{99/100}0{,}02\approx 389{,}2$, car $\exp_{99/100}$ est une bijection décroissante

Il faudrait donc analyser au moins 390 échantillons.

d) Avec le nouveau procédé, on fait soit une seule analyse, soit 51 analyses. D'où: Im $Y = \{1;51\}$.

$\{Y=1\}$: C'est le cas lorsque le virus n'est présent dans aucun des 50 échantillons.

$$P(Y=1)=P(X=0)=C_n^0\left(\tfrac{1}{100}\right)^0\left(\tfrac{99}{100}\right)^{50}=0{,}99^{50}\approx 60{,}50\%$$

$\{Y=51\}$: $P(Y=51)=1-P(Y=1)=1-0{,}99^{50}\approx 39{,}50\%$

Loi de Y:

y_k	1	51
$P(Y=y_k)$	$0{,}99^{50}$	$1-0{,}99^{50}$

Espérance de Y: $E(Y)=0{,}99^{50}\cdot 1+(1-0{,}99^{50})\cdot 51\approx 20{,}75$.

Comme 20,75 < 50, le nouveau procédé est en moyenne plus économique que l'ancien.

Question III ((3,5+1,5+3)+(4+2)+5 = 19 points)

1) On donne $F(1;-1), d\equiv x=5, \varepsilon=\dfrac{1}{3}$.

a) Comme $0<\varepsilon<1$, Γ est une <u>ellipse</u>. Equation réduite:

$$M(x;y)\in\Gamma$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{d}(M,F)=\frac{1}{3}\cdot\mathrm{d}(M,d) \qquad |\,()^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=\frac{1}{9}\cdot(x-5)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+(y+1)^2=\frac{1}{9}x^2-\frac{10}{9}x+\frac{25}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{9}x^2-\frac{8}{9}x+(y+1)^2=\frac{16}{9} \qquad |\cdot\frac{9}{8}$$

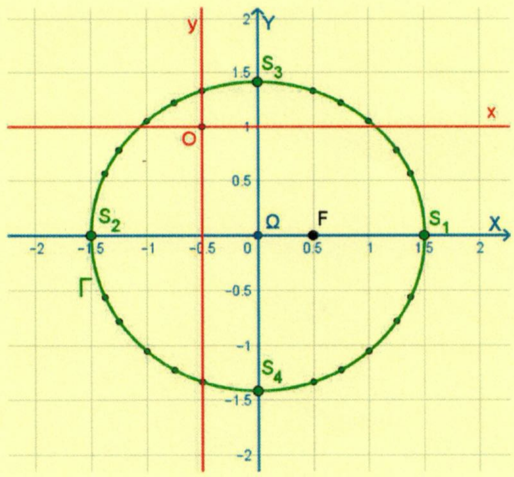
$$\Leftrightarrow x^2-x+\frac{9(y+1)^2}{8}=2$$

$$\Leftrightarrow x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{9(y+1)^2}{8}=2+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2+\frac{9(y+1)^2}{8}=\frac{9}{4} \qquad |\cdot\frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{9}{4}}+\frac{(y+1)^2}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{\frac{9}{4}}+\frac{Y^2}{2}=1, \text{ avec } \begin{cases} X=x-\frac{1}{2} \\ Y=y+1 \end{cases}$$



b) Centre: $\Omega(\frac{1}{2};-1)$.

Sommets, dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$: $S_1(\frac{3}{2};0); S_2(-\frac{3}{2};0); S_3(0;\sqrt{2}); S_4(0;-\sqrt{2})$.

Sommets, dans $(O,\vec{i},\vec{j})$: $S_1(2;-1); S_2(-1;-1); S_3(\frac{1}{2};\sqrt{2}-1); S_4(\frac{1}{2};-\sqrt{2}-1)$.

c) Représentation graphique, dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$:

$$\frac{X^2}{\frac{9}{4}}+\frac{Y^2}{2}-1=0 \Leftrightarrow \frac{Y^2}{2}=1-\frac{4X^2}{9} \overset{|\cdot 2}{\Leftrightarrow} Y^2=2-\frac{8X^2}{9} \overset{|\sqrt{\ }}{\Leftrightarrow} Y=\pm\sqrt{2-\frac{8X^2}{9}}, \text{ avec } X\in[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}]$$

On utilise seulement des X positifs ou nuls, ensuite on complète par symétrie.

X	0	0,5	0,75	1	1,25	1,375	1,5
Y	±1,4	±1,3	±1,2	±1,1	±0,8	±0,6	0

2) a) Comme Γ admet une asymptote, il s'agit d'une hyperbole. Comme l'axe focal est (Oy), l'équation réduite s'écrit:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0\ (1),\ \text{avec } a>0 \text{ et } b>0$$

Comme la pente d'une asymptote est $\frac{1}{4}$, on a: $\frac{b}{a}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow b=\frac{1}{4}a\ (2)$.

Comme $A(-2;1)\in\Gamma$, on obtient par (1) et (2):

$$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{\frac{1}{16}a^2}+1=0\Leftrightarrow\frac{4}{a^2}-\frac{16}{a^2}+1=0\overset{|\cdot a^2}{\Leftrightarrow}a^2=12\overset{(a>0)}{\Leftrightarrow}a=2\sqrt{3}$$

Dans (2): $b=\frac{1}{4}a=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Finalement, l'équation réduite de Γ est: $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{\frac{3}{4}}+1=0$.

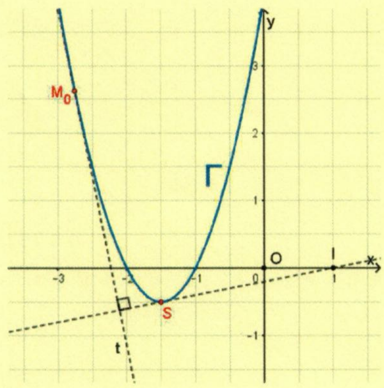
b) $c^2=a^2+b^2=12+\frac{3}{4}=\frac{51}{4}$; d'où les foyers $F(0;\frac{\sqrt{51}}{2})$ et $F'(0;-\frac{\sqrt{51}}{2})$.

Excentricité: $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{\frac{\sqrt{51}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{17}>1$.

3) Recherche du sommet de Γ:

$$y=2x^2+6x+4\Leftrightarrow y=2(x^2+3x)+4\Leftrightarrow y=2(x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4})-\frac{9}{2}+4\Leftrightarrow y+\frac{1}{2}=2(x+\frac{3}{2})^2$$

D'où le sommet $S(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2})$ de Γ.



Equation de la tangente t à Γ en $M_0(x_0;y_0)\in\Gamma$:

$$\frac{1}{2}(y+y_0)=2x_0x+3(x+x_0)+4$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y_0=2x_0x+3x+3x_0+4$$

$$\Leftrightarrow(2x_0+3)x-\frac{1}{2}y+(\ldots)=0$$

Vecteur directeur de t: $\vec{v'}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\2x_0+3\end{pmatrix}$, ou alors $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\4x_0+6\end{pmatrix}$.

Comme $\vec{SI}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, un vecteur directeur de (SI) est p.ex. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$.

Finalement: $t\perp(SI)\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow5+4x_0+6=0\Leftrightarrow x_0=-\frac{11}{4}$.