LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	**EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES** **2020** **CORRIGÉ – BARÈME**	
BRANCHE	**SECTION(S)**	**ÉPREUVE ÉCRITE**
Mathématiques 1	**B**	*Durée de l'épreuve :* 3 heures *Date de l'épreuve :* 29 mai 2020

Question 1 [10+6+6=22 points]

1. $P(z) = z^3 - 2(1+i)z^2 + \alpha z + \beta$

   (a) $$\begin{aligned} P(-3i) = 0 &\iff (-3i)^3 - 2(1+i)(-3i)^2 + \alpha(-3i) + \beta = 0 \\ &\iff 27i + 18(1+i) - 3\alpha i + \beta = 0 \\ &\iff 3i\alpha - \beta = 18 + 45i \qquad (1) \end{aligned}$$

   $P(3+2i) = 22i - 14$

   Schéma de Horner :

   $$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2-2i & \alpha & \beta \\ \hline 3+2i & & 3+2i & 3+2i & 5+12i+(3+2i)\alpha \\ \hline & 1 & 1 & 3+2i+\alpha & | \; 5+12i+(3+2i)\alpha+\beta \end{array}$$

   On déduit : $(3+2i)\alpha + \beta = -19 + 10i$ (2)

   $$\begin{aligned} (1)+(2) \quad &\Longrightarrow (3+5i)\alpha = -1 + 55i \\ &\iff \alpha = \frac{-1+55i}{3+5i} \\ &\iff \alpha = \frac{(-1+55i)\cdot(3-5i)}{9+25} \\ &\iff \alpha = \frac{-3+5i+165i+275}{34} \\ &\iff \alpha = 8+5i \end{aligned}$$

   Dans (1) : $\beta = 3i\cdot(8+5i) - 18 - 45i = -33 - 21i$

   Finalement : $P(z) = z^3 - 2(1+i)z^2 + (8+5i)z - 33 - 21i$ [4]

   (b) $P(-3i) = 0$

   Schéma de Horner :

   $$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2-2i & 8+5i & -33-21i \\ \hline -3i & & -3i & -15+6i & 33+21i \\ \hline & 1 & -2-5i & -7+11i & | \; 0 \end{array}$$

   Donc $P(z) = (z+3i)\cdot\underbrace{(z^2 + (-2-5i)z - 7 + 11i}_{Q(z)}$

Posons $Q(z) = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2-5i)^2 - 4\cdot(-7+11i)\\ &= 4+20i-25+28-44i\\ &= 7-24i\end{aligned}$$

Soit $x+yi$ une r.c.c. de Δ, $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x^2-y^2=7\\ 2xy=-24\\ x^2+y^2=\sqrt{7^2+(-24)^2}\end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2=7 & (1)\\ 2xy=-24 & (2)\\ x^2+y^2=25 & (3)\end{cases}$$

$(1)+(3):\qquad 2x^2=32 \iff x=-4 \vee x=4$

$(3)-(1):\qquad 2y^2=18 \iff y=-3 \vee y=3$

Par (2) on déduit que x et y sont de signes contraires.

Les r.c.c. de $7-24i$ sont : $4-3i$ et $-4+3i$.

les racines de Q sont :

$$z_1=\frac{2+5i+4-3i}{2}=3+i \quad \text{et} \quad z_2=\frac{2+5i-4+3i}{2}=-1+4i$$

Finalement, l'ensemble des racines de P est :

$$\boxed{E_R=\{-3i;3+i;-1+4i\}}$$ [4]

(c) Soit $A(-3i)$, $B(3+i)$ et $C(-1+4i)$.

$$AB=|z_B-z_A|=|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$$

$$AC=|z_C-z_A|=|-1+7i|=\sqrt{(-1)^2+7^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$$BC=|z_C-z_B|=|-4+3i|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$$

$AB=BC$, donc le triangle ABC est isocèle en B.

De plus : $AC^2=AB^2+BC^2$

Par la réciproque du théorème de Pythagore on conclut que le triangle ABC est aussi rectangle en B. [2]

2. $\omega=\dfrac{i\,\overline{z}-2}{2-iz}$, $\qquad z\in\mathbb{C}\setminus\{-2i\}$

Posons $z=x+yi$, $\qquad (x;y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0;-2)\}$

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{i(x-yi)-2}{2-i(x+yi)}\\ &= \frac{[(y-2)+xi]\cdot[(y+2)+xi]}{[(y+2)-xi]\cdot[(y+2)+xi]}\\ &= \frac{(y-2)(y+2)-x^2+[x(y-2)+x(y+2)]i}{(y+2)^2+x^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{y^2 - x^2 - 4 + 2xyi}{(y+2)^2 + x^2}$$

(a) $\omega \in \mathbb{R} \iff 2xy = 0 \quad \wedge \quad (x;y) \neq (0;-2)$

$\iff (x = 0 \ \vee \ y = 0) \quad \wedge \quad (x;y) \neq (0;-2)$

$\mathbb{E}$ est la réunion des axes de coordonnées privée du point $A(-2i)$.

(b) $\omega \in i\mathbb{R} \iff y^2 - x^2 - 4 = 0 \quad \wedge \quad (x;y) \neq (0;-2)$

$\iff \dfrac{-x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \quad \wedge \quad (x;y) \neq (0;-2)$

$\mathbb{F}$ est une hyperbole équilatère de centre $O(0)$, d'axe focal (Oy) privée du sommet $A(-2i)$. [6]

3. (a) $z^6 + z^3 + 1 = 0 \qquad (1)$

Posons $z^3 = Z,\ Z \in \mathbb{C}$.

L'équation (1) s'écrit : $\quad Z^2 + Z + 1 = 0 \ \wedge \ Z = z^3$.

Résolution de $Z^2 + Z + 1 = 0$: $\qquad \Delta = -3 = 3i^2$

Les solutions sont : $\quad Z_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \ \wedge \ Z_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

Or $z^3 = Z$, donc les solutions de l'équation (1) sont les racines cubiques complexes de Z_1 et celles de Z_2.

$Z_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

Les racines cubiques complexes de Z_1 sont données par :

$x_k = \text{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right)$, où $k \in \{0;1;2\}$

$Z_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

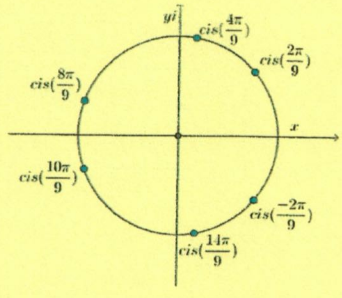
Les racines cubiques complexes de Z_2 sont données par :

$y_k = \text{cis}\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right)$, où $k \in \{0;1;2\}$

Ainsi, l'ensemble de solution de l'équation (1) est :

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ \text{cis}\left(-\frac{2\pi}{9}\right) ; \text{cis}\left(\frac{4\pi}{9}\right) ; \text{cis}\left(\frac{10\pi}{9}\right) ; \text{cis}\left(\frac{2\pi}{9}\right) ; \text{cis}\left(\frac{8\pi}{9}\right) ; \text{cis}\left(\frac{14\pi}{9}\right) \right\}$$

(b)



[6]

Question 2

[3+8+2+7=20 points]

1. $$\left(\frac{\sqrt{5}}{4x^2}-\frac{2x}{\sqrt{5}}\right)^{13}=\sum_{k=0}^{13}C_{13}^{k}\cdot(-1)^k\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{4x^2}\right)^{13-k}\cdot\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right)^k$$
$$=\sum_{k=0}^{13}C_{13}^{k}\cdot(-1)^k\cdot(\sqrt{5})^{13-2k}\cdot 2^{-26+3k}\cdot x^{-26+3k}$$
Le terme en x est obtenu pour $-26+3k=1 \iff k=9$.

Il vaut : $C_{13}^{9}\cdot(-1)\cdot(\sqrt{5})^{-5}\cdot 2x=-\dfrac{286\sqrt{5}}{25}x$ [3]

2. $\sharp\Omega=C_{32}^{5}=201376$.

(a) événement A : on tire exactement deux dames et deux coeurs.

- on tire la dame de coeur, une autre dame parmi les 3 restantes, un autre coeur parmi les 7 restants et 2 autres cartes parmi les 21 cartes ni dame ni coeur ;
- on tire deux dames « non coeur », deux coeurs « non dame » et une autre carte parmi les 21 cartes ni dame ni coeur.

$\sharp A=1\cdot C_3^1\cdot C_7^1\cdot C_{21}^2+C_3^2\cdot C_7^2\cdot C_{21}^1=5733$

$P(A)=\dfrac{\sharp A}{\sharp\Omega}=\dfrac{5733}{201376}=\dfrac{819}{28768}\approx 0,028 \quad (2,8\%)$ [2]

(b) événement B : obtenir un « full » :

On choisit avec ordre les deux valeurs, puis sans ordre 3 cartes parmi 4 de la première valeur et 2 cartes parmi 4 de la deuxième valeur.

$\sharp B=A_8^2\cdot C_4^3\cdot C_4^2=1344$

$P(B)=\dfrac{\sharp B}{\sharp\Omega}=\dfrac{1344}{201376}=\dfrac{6}{899}\approx 0,0067 \qquad (0,67\%)$ [2]

(c) Soit n le nombre de mains à tirer. Il s'agit d'une expérience de Bernoulli, car les n mains sont indépendantes et équiprobables.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de « full » :

X suit une loi binomiale avec $p=\dfrac{6}{899}$ et $q=\dfrac{893}{899}$.

$$
\begin{aligned}
& P(X \geqslant 1) \geqslant 0,95 \\
\iff\ & 1 - P(X = 0) \geqslant 0,95 \\
\iff\ & P(X = 0) \leqslant 0,05 \\
\iff\ & \left(\frac{893}{899}\right)^n \leqslant 0,05 \\
\iff\ & \ln\left(\frac{893}{899}\right)^n \leqslant \ln(0,05) \\
\iff\ & n \cdot \ln\left(\frac{893}{899}\right) \leqslant \ln(0,05) \\
\iff\ & n \geqslant \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{893}{899}\right)} \\
\iff\ & n \geqslant 447,36
\end{aligned}
$$

Il faut au moins tirer 448 mains pour que la probabilité d'obtenir au moins un « full » soit supérieure ou égale à 95 %.

[4]

3. On coche au hasard 10 réponses dans le questionnaire.

   (a) Les réponses sont cochées au hasard, donc X suit une loi binomiale avec $n = 10$, $p = 0,25$ et $q = 0,75$.

   [1]

   (b) $P(X \geqslant 4) = \sum_{k=4}^{10} C_{10}^{k} \cdot 0,25^k \cdot 0,75^{10-k} \approx 0,224 \qquad (22,4\%)$ [1]

4. Tableau donnant la somme des points lorsqu'on jette 2 dés :

S	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$P(S = 12) = \frac{1}{36}$

$P(S \text{ est un nombre premier}) = \frac{15}{36}$

$P(S \neq 12 \text{ et } S \text{ n'est pas premier}) = \frac{5}{9}$

   (a) Loi de probabilité de X :

x_i	-6	-1	4	$k-3$	$k+2$	$2k$
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{81}$	$\frac{25}{54}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{5}{162}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{1}{1296}$

$$P(X=-6)=\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{25}{81}$$
$$P(X=-1)=2\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{12}=\frac{25}{54}$$
$$P(X=4)=\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12}=\frac{25}{144}$$
$$P(X=k-3)=2\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{5}{9}$$
$$P(X=k+2)=2\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{216}$$
$$P(X=2k)=\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{1296}$$

[5]

(b) $$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{6} x_i\cdot P(X=x_i)\\ &= -6\cdot\frac{25}{81}-\frac{25}{54}+4\cdot\frac{25}{144}+(k-3)\cdot\frac{5}{162}+(k+2)\cdot\frac{5}{216}+2k\cdot\frac{1}{1296}\\ &= -\frac{5}{3}+\frac{1}{18}\cdot k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X)=0 &\iff -\frac{5}{3}+\frac{1}{18}\cdot k=0\\ &\iff k=30 \end{aligned}$$

Le jeu est équilibré lorsque $E(X)=0$, donc si $k=30$. [2]

Question 3

[3+7+8=18 points]

1. $\mathbb{L}$ est une parabole de foyer $P(4;0)$ et de directrice $d\equiv x=-1$

$$\begin{aligned} M(x;y)\in\mathbb{L} &\iff \text{dist}(M;P)=\text{dist}(M;d)\\ &\iff \text{dist}^2(M;P)=\text{dist}^2(M;d)\\ &\iff (x-4)^2+y^2=(x+1)^2\\ &\iff y^2=10x-15\\ &\iff y^2=10(x-\tfrac{3}{2}) \qquad \text{(équation cartésienne réduite de } \mathbb{L}\text{)} \end{aligned}$$

Ainsi, le sommet de la parabole est $S(\frac{3}{2};0)$ et le paramètre vaut $p=5$. [3]

2. $\mathcal{C} \equiv y = -1 - \frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 4x + \frac{25}{4}} \iff -\frac{3}{4}(y+1) = \sqrt{(x-2)^2 + \frac{9}{4}}$

Conditions d'existence : $\underbrace{(x-2)^2 + \frac{9}{4} \geqslant 0}_{\text{toujours vérifié}} \quad \wedge \quad y \leqslant -1$

$\forall y \in]-\infty; -1]$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \quad &\equiv \quad \frac{9}{16}(y+1)^2 = (x-2)^2 + \frac{9}{4} \\ &\iff \quad -\frac{(x-2)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \qquad (E) \end{aligned}$$

[2]

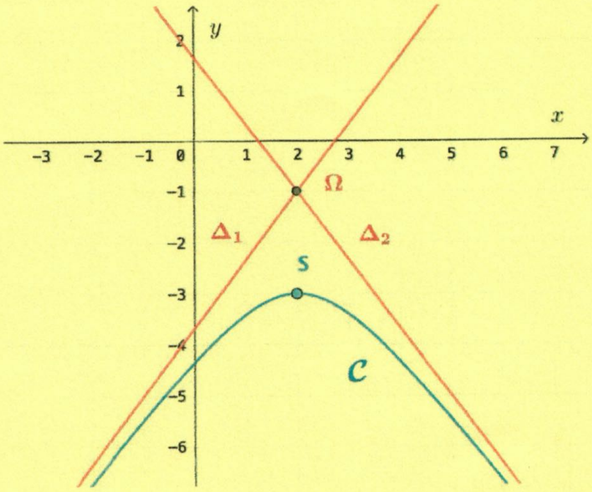
(E) est l'équation d'une hyperbole $\mathbb{H}$ de centre $\Omega(2; -1)$ et d'axe focal d'équation $x = 2$.

$a = \frac{3}{2}$ et $b = 2$.

asymptotes : $\Delta_1 \equiv y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3}$ et $\Delta_2 \equiv y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$

$\mathcal{C}$ est une demi-hyperbole ; c'est la partie de $\mathbb{H}$ située en-dessous de la droite d'équation $y = -1$. [2]

x	2	2,5	3	4	5
y	-3	$-3,1$	$-3,4$	$-4,3$	$-5,5$



[3]

3. $\Gamma \equiv 9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$

$\iff 9(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 36$

Γ est une ellipse de centre $\Omega(1; 2)$

Posons : $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

Dans le repère $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$, $\Gamma \equiv 9X^2 + 4Y^2 = 36$ et $P(3; 1)$.

Soit t la tangente à Γ au point $A(X_A; Y_A)$

$t \equiv 9XX_A + 4YY_A = 36$

$$P(3;1) \in t \iff 27X_A + 4Y_A = 36$$

$$\iff Y_A = 9\left(1 - \frac{3}{4}X_A\right)$$

$$A(X_A;Y_A) \in \Gamma \iff 9X_A^2 + 4Y_A^2 = 36$$

$$\iff 9X_A^2 + 4\cdot 81\left(1 - \frac{3}{4}X_A\right)^2 = 36 \quad |:9$$

$$\iff X_A^2 + 36\cdot\left(1 - \frac{3}{2}X_A + \frac{9}{16}X_A^2\right) = 4$$

$$\iff \frac{85}{4}X_A^2 - 54X_A + 32 = 0$$

$$\Delta = (-54)^2 - 4\cdot\frac{85}{4}\cdot 32 = 196$$

$$X_A = \frac{8}{5} \vee X_A = \frac{16}{17}$$

Si $X_A = \frac{8}{5}$, alors $Y_A = 9\cdot\left(1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{5}\right) = -\frac{9}{5}$

Si $X_A = \frac{16}{17}$, alors $Y_A = 9\cdot\left(1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{16}{17}\right) = \frac{45}{17}$

Par conséquent, il y a deux tangentes à Γ issues de P.

Dans le repère $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$:

t_1 passant par $A_1\left(\frac{8}{5}; -\frac{9}{5}\right)$:

$$t_1 \equiv \frac{2}{5}X - \frac{1}{5}Y = 1 \iff Y = 2X - 5$$

t_2 passant par $A_2\left(\frac{16}{17}; \frac{45}{17}\right)$:

$$t_2 \equiv \frac{4}{17}X + \frac{5}{17}Y = 1 \iff Y = -\frac{4}{5}X + \frac{17}{5}$$

Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

t_1 passant par $A_1\left(\frac{13}{5}; \frac{1}{5}\right)$:

$$t_1 \equiv y - 2 = 2(x-1) - 5 \iff y = 2x - 5$$

t_2 passant par $A_1\left(\frac{33}{17}; \frac{79}{17}\right)$:

$$t_2 \equiv y - 2 = -\frac{4}{5}(x-1) + \frac{17}{5} \iff y = -\frac{4}{5}x + \frac{31}{5}$$ [8]