LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2020

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques 1	**B**	*Durée de l'épreuve :*	*3 heures*
		Date de l'épreuve :	*29 mai 2020*

Question 1 [10+6+6=22 points]

1. Soit le polynôme P à variable complexe $P(z) = z^3 - 2(1+i)z^2 + \alpha z + \beta$, où α et β sont des paramètres complexes.
   (a) Déterminez α et β sachant que $-3i$ est une racine de P et que le reste de la division euclidienne de $P(z)$ par $z - 3 - 2i$ vaut $22i - 14$.
   (b) Déterminez ensuite les autres racines de P, après avoir remplacé α et β par les valeurs trouvées sous (a).
   (c) Dans le plan de Gauss rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B et C dont les affixes sont les racines de P.
   Déterminez la nature du triangle ABC et justifiez votre réponse !
2. Soit le nombre complexe $\omega = \dfrac{i\,\overline{z} - 2}{2 - iz}$, où $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2i\}$.
   (a) Déterminez dans le plan de Gauss l'ensemble $\mathbb{E} = \{M(z)/\omega \in \mathbb{R}\}$.
   (b) Déterminez dans le plan de Gauss l'ensemble $\mathbb{F} = \{M(z)/\omega \in i\mathbb{R}\}$.
3. (a) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 + z^3 + 1 = 0$.
   (b) Portez dans le plan de Gauss les points dont les affixes sont les solutions obtenues.

Question 2 [3+8+2+7=20 points]

1. Déterminez le terme en x dans le développement de $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{4x^2} - \dfrac{2x}{\sqrt{5}}\right)^{13}$.
2. On tire au hasard une main de 5 cartes dans un jeu bien battu de 32 cartes.
   (a) Déterminez la probabilité d'obtenir exactement deux dames et deux coeurs.
   (b) Déterminez la probabilité d'obtenir un « full » (trois cartes d'une valeur donnée et deux cartes d'une même deuxième valeur différente de la première).
   (c) Combien de fois doit-on tirer une main pour que la probabilité d'obtenir au moins un « full » soit supérieure ou égale à 95 % ?

3. Un questionnaire d'examen comporte 10 questions à choix multiple. Pour chaque question, on propose 4 réponses ; une seule est exacte. Le candidat doit cocher une case pour chaque question. On suppose qu'il répond au hasard à chacune des questions et on note X la variable aléatoire correspondant au nombre de réponses exactes.
   (a) Identifiez la loi de probabilité de X et justifiez votre réponse.
   (b) Quelle est la probabilité que le candidat réussisse l'épreuve, sachant qu'il faut au moins avoir répondu correctement à 4 questions ?

4. Un jeu consiste à lancer une paire de dés équilibrés de couleurs différentes. On note S la somme des points obtenus. Si S est un nombre premier, on gagne 2 €, si $S = 12$, on gagne k € et sinon on perd 3 €.

   Un joueur lance deux fois de suite la paire de dés. Soit X son gain (positif ou négatif).
   (a) Déterminez la loi de probabilité de X.
   (b) Déterminez la valeur de k pour que le jeu soit équilibré.

Question 3 [3+7+8=18 points]

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, établissez l' équation cartésienne réduite du lieu $\mathbb{L}$ des points du plan équidistants du point $P(4; 0)$ et de la droite $d \equiv x + 1 = 0$ et précisez sa nature et ses éléments caractéristiques (sommet, foyer, directrice, paramètre).
2. On donne la courbe $\mathcal{C}$ définie par $\mathcal{C} \equiv y = -1 - \frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 4x + \frac{25}{4}}$.

   Identifiez $\mathcal{C}$ et tracez $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
3. Dans un repère orthonormé on considère la conique Γ définie par

$$\Gamma \equiv 9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0.$$

   Déterminez des équations des tangentes à Γ issues du point $P(4; 3)$ et précisez les coordonnées des points de tangence.