LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2019

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE	
Mathématiques I	**B**	*Durée de l'épreuve :*	*3 heures*
		Date de l'épreuve :	*16/09/2019*

<u>Question I</u> : (6+2+7 = **15 points**)

1) On donne le polynôme $P(z) = z^3 + (m + 6i)z^2 + (2m + 5 + 6i)z - 3m$ où $m \in \mathbb{C}$.

   a) Pour quelle valeur de m, le polynôme $P(z)$ est-il divisible par $(z - 3i)$?

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$, après avoir remplacé m par la valeur trouvée en a).

2) Dans le plan de Gauss, on donne les points $A(\sqrt{3} + i)$ et $B(6 - 2\sqrt{3}\, i)$.

   Montrer que B est l'image de A par la composée d'une rotation de centre O et d'une homothétie de rapport strictement positif dont on précisera les caractéristiques.

3) Pour tout $z \in \mathbb{C} - \{i\}$, on donne le nombre complexe :

$$\omega = \frac{z - 3i}{i\,\overline{z} - 1}$$

   a) Dans le plan de Gauss, déterminer l'ensemble $\mathbb{E}$ défini par $\mathbb{E} = \{M(z) | \omega \in i\mathbb{R}\}$.

   b) Démontrer que, dans le plan de Gauss, l'ensemble $\mathbb{F}$ défini par $\mathbb{F} = \{M(z) | \omega \in \mathbb{R}\}$ est une hyperbole équilatère privée d'un de ses sommets.

<u>Question II</u> : (3+4+3+6= **16 points**)

1) Une urne contient 9 boules blanches, 6 boules rouges et 5 boules vertes. On tire simultanément 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants :

   a) A : « exactement deux des trois boules ont la même couleur »

   b) B : « au moins une des trois boules est rouge »

2) Déterminer les entiers naturels n vérifiant :

$$C_{3n}^1 + C_{3n}^2 + C_{3n}^3 - 1015\, n = 0$$

3) Un tireur vise une cible avec une chance sur trois de la toucher.

   Combien de fois doit-il tirer afin que la cible soit atteinte au moins une fois avec une probabilité supérieure ou égale à 97% ?

4) Un test est composé de 4 questions auxquelles on doit répondre par Vrai et Faux. On coche au hasard les réponses aux 4 questions. Le barème est le suivant :

- 4 points par réponse exacte
- -2 points pour une réponse inexacte.

Si la somme des points obtenus par un candidat est négative, on lui attribue la note finale 0.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, définie par la note finale d'un candidat ayant répondu au hasard.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

Question III : (5+6+6 =**17 points**)

1) Identifier la courbe $\Gamma \equiv y = 2 - \frac{5}{4}\sqrt{-x+7}$ et tracer Γ dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

2) Dans un repère orthonormé du plan, on donne la conique

$$\Gamma \equiv 9x^2 + 5y^2 = 45$$

a) Identifier Γ et donner ses éléments caractéristiques (centre, sommets, axe focal, foyers, directrices, asymptotes éventuelles, excentricité).

b) Déterminer des équations réduites des tangentes à Γ perpendiculaires à la droite d d'équation $d \equiv y = \frac{2\sqrt{5}}{3}x - 1$.

3) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, on considère les points $A(1; 5)$ et $B(1; -1)$ et l'ensemble Γ des points M tels que $|MA - MB| = 4$.
Déterminer la nature, le centre, les foyers, les sommets, l'excentricité, les asymptotes éventuelles et l'équation réduite de Γ dans $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

Question IV : (**12 points**)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ d'unité graphique 3 cm, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
Soient A et B deux points du cercle $\mathcal{C}$ avec $A(-1; 0)$ et $B(1; 0)$ et soit $D(\cos\theta\,; \sin\theta)$ un point mobile sur le cercle $\mathcal{C}$ avec $\theta \in \,]0; 2\pi[\, - \{\pi\}$. On note par E le symétrique de B par rapport à D.
On définit le point d'intersection H des droites (AD) et (OE).
Faire une figure.
Déterminer, décrire avec précision et représenter le lieu $\mathbb{L}$ du point H lorsque D parcourt le cercle $\mathcal{C}$ privé des points A et B.