LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES CLASSIQUES
2019
CORRIGÉ – BARÈME

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
MATHEMATIQUES I	B	*Durée de l'épreuve :* 180 minutes *Date de l'épreuve :* 24/05/2019

Question I (9 + 5 + 3 = 17 points)

1. $\frac{1}{2}z^6+(1+3i)z^3+8+8i=0$

Posons $z^3=t$.

Alors l'équation devient : $\frac{1}{2}t^2+(1+3i)t+8+8i=0$.

$$\Delta=(1+3i)^2-2(8+8i)=1+6i-9-16-16i=-24-10i$$

$u=x+iy$ ($x,y\in\mathbb{R}$) est une racine carrée complexe de $-24-10i$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=-24 & (1)\\ x^2+y^2=26 & (2)\\ 2xy=-10 & \Rightarrow\ x \text{ et } y \text{ sont de signe contraire}\end{cases}$$

(1) + (2): $2x^2=2\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

(2) − (1): $2y^2=50\Leftrightarrow y^2=25\Leftrightarrow y=5$ ou $y=-5$

Les racines carrées complexes de $-24-10i$ sont $1-5i$ et $-1+5i$.

Alors $t=-1-3i+1-5i=-8i$ ou $t=-1-3i-1+5i=-2+2i$.

Donc $z^3=-8i$ ou $z^3=-2+2i$.

$z^3=-2+2i$	$z^3=-8i$
$\Leftrightarrow(rcis\varphi)^3=2\sqrt{2}cis\frac{3\pi}{4}\quad(r\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi\in\mathbb{R})$	$\Leftrightarrow(rcis\varphi)^3=8cis\frac{3\pi}{2}\quad(r\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi\in\mathbb{R})$
$\Leftrightarrow r^3cis(3\varphi)=2\sqrt{2}cis\frac{3\pi}{4}$	$\Leftrightarrow r^3cis(3\varphi)=8cis\frac{3\pi}{2}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}r^3=2\sqrt{2}\\ 3\varphi=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$	$\Leftrightarrow\begin{cases}r^3=8\\ 3\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}r=\sqrt{2}\\ \varphi=\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\end{cases}$	$\Leftrightarrow\begin{cases}r=2\\ \varphi=\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

$$S=\left\{\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4},\sqrt{2}cis\frac{11\pi}{12},\sqrt{2}cis\frac{19\pi}{12},2cis\frac{\pi}{2},2cis\frac{7\pi}{6},2cis\frac{11\pi}{6}\right\}$$

2. $Z=\dfrac{z+2}{1+iz}$, avec $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$ et $z=x+iy, x,y\in\mathbb{R}$.

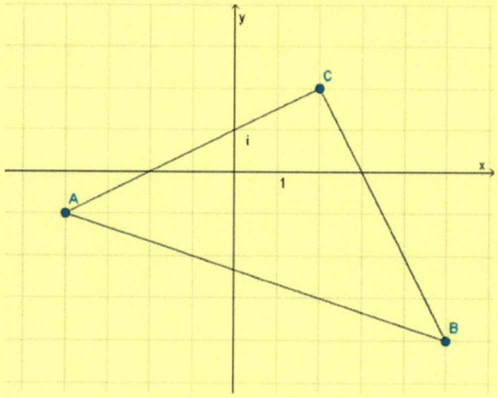
$$Z=\frac{x+iy+2}{1+i(x+iy)}$$
$$=\frac{x+2+iy}{1+ix-y}$$
$$=\frac{(x+2)+iy}{(1-y)+ix}\cdot\frac{(1-y)-ix}{(1-y)-ix}$$
$$=\frac{(x+2)(1-y)-ix(x+2)+iy(1-y)+xy}{(1-y)^2+x^2}$$
$$=\frac{x-xy+2-2y+xy+i(-x^2-2x+y-y^2)}{(1-y)^2+x^2}$$
$$=\frac{x-2y+2}{x^2+(1-y)^2}+i\frac{-x^2-2x-y^2+y}{x^2+(1-y)^2}$$

$$M(z)\in E\Leftrightarrow Z\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow\frac{-x^2-2x-y^2+y}{x^2+(1-y)^2}=0 \text{ et } (x,y)\neq(0,1)$$
$$\Leftrightarrow -x^2-2x-y^2+y=0 \text{ et } (x,y)\neq(0,1)$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x+1-1+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0 \text{ et } (x,y)\neq(0,1)$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2-1+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0 \text{ et } (x,y)\neq(0,1)$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}}_{\text{cercle } C \text{ de centre } \Omega\left(-1,\frac{1}{2}\right) \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{5}}{2}} \quad \text{et } (x,y)\neq(0,1)$$

$A(0,1)\in C$ car $(0+1)^2+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$.

Donc $E=C\setminus\{A\}$.

3. $z_A = -4 - i$, $z_B = 5 - 4i$, $z_C = 2 + 2i$



$$\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}} = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{2+2i+4+i}{5-4i+4+i}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{6+3i}{9-3i}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{2+i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{6+2i+3i-1}{10}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{5+5i}{10}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$
$$= \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

$$\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}} = \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{5-4i-2-2i}{-4-i-2-2i}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{3-6i}{-6-3i}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{1-2i}{-2-i}\cdot\frac{-2+i}{-2+i}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{-2+i+4i+2}{5}\right)$$
$$= \arg\left(\frac{5i}{5}\right)$$
$$= \arg(i)$$
$$= \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Alors $\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

ou bien :

$AB = |z_B - z_A| = |5-4i+4+i| = |9-3i| = \sqrt{9^2+(-3)^2} = \sqrt{90}$

$AC = |z_C - z_A| = |2+2i+4+i| = |6+3i| = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45}$

$BC = |z_C - z_B| = |2+2i-5+4i| = |-3+6i| = \sqrt{(-3)^2+6^2} = \sqrt{45}$

On a $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Par la réciproque de Pythagore, $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}$.

Comme $AC = BC$, le triangle ABC est isocèle en C et donc $\widehat{CAB} = \widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$.

Question II (6 + 6 + 3 = 15 points)

1. k boules noires ($k \geq 2$) et 3 boules blanches
   tirage successif et avec remise de deux boules
   - -9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
   - -1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
   - $+5$ euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes.

   a) Un joueur joue une partie.

   i) X = gain algébrique

   Loi de probabilité de X

x_i	-9	-1	5
$P(X=x_i)$	$\dfrac{9}{(k+3)^2}$	$\dfrac{k^2}{(k+3)^2}$	$\dfrac{6k}{(k+3)^2}$

$$P(X=-9)=P(\text{2 boules blanches})=\frac{3\cdot 3}{(k+3)^2}=\frac{9}{(k+3)^2}$$

$$P(X=-1)=P(\text{2 boules noires})=\frac{k\cdot k}{(k+3)^2}=\frac{k^2}{(k+3)^2}$$

$$P(X=5)=P(\text{2 boules de couleurs différentes})=\frac{\overbrace{k\cdot 3+3\cdot k}^{\text{NB ou BN}}}{(k+3)^2}=\frac{6k}{(k+3)^2}$$

   ii) Le jeu est favorable au joueur

$$\Leftrightarrow E(X)>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-9\cdot 9-k^2+5\cdot 6k}{(k+3)^2}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-k^2+30k-81}{\underbrace{(k+3)^2}_{>0}}>0$$

$$\Leftrightarrow -k^2+30k-81>0 \qquad \Delta=900-324=576$$

$$k_1=\frac{-30-24}{-2}=27 \text{ et } k_2=\frac{-30+24}{-2}=3$$

k	$-\infty$		2		3		27		$+\infty$
$-k^2+30k-81$				$-$	0	$+$	0	$-$	

Finalement k peut prendre toutes les valeurs entières dans l'intervalle $[4,26]$.

b) $k = 7$

Y = nombre de parties gagnées

Schéma de Bernoulli car événements contraires et indépendants

$$p = P(\text{gagner une partie}) = \frac{6 \cdot 7}{(7+3)^2} = 0,42$$

$q = 1 - p = 0,58$

i) On joue 5 parties, donc $n = 5$.

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - C_5^0(0,42)^0(0,58)^5 = 1 - (0,58)^5 \approx 93,44\%$

ii) Soit n le nombre de parties jouées.

$P(Y \geq 1) > 0,99$

$\Leftrightarrow 1 - P(Y < 1) > 0,99$

$\Leftrightarrow 1 - P(Y = 0) > 0,99$

$\Leftrightarrow P(Y = 0) < 0,01$

$\Leftrightarrow C_n^0(0,42)^0(0,58)^n < 0,01$

$\Leftrightarrow (0,58)^n < 0,01$

$\Leftrightarrow n\log(0,58) < \log(0,01) \,|: \log(0,58) < 0$

$$\Leftrightarrow n > \frac{-2}{\log(0,58)}$$

$\Leftrightarrow n > 8,45$

Le joueur doit jouer au minimum 9 fois.

2. mains possibles au poker : $C_{32}^5 = 201\ 376$

Pour obtenir une double paire, il faut :

choisir les valeurs des deux paires : C_8^2

et choisir deux cartes de ces deux valeurs : $C_4^2 \cdot C_4^2$

et choisir la cinquième carte : C_{24}^1

$$P(\text{obtenir une double paire}) = \frac{C_8^2 C_4^2 C_4^2 \cdot 24}{C_{32}^5} = \frac{24192}{201376} \approx 12,01\%$$

Question III (7 + 3 + 1 + 3 = 14 points)

1. a)

$\Gamma \equiv 25x^2 - 100x + 9y^2 - 18y - 116 = 0$

$\Leftrightarrow 25\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) + 9\left(y^2 - 2y + 1 - 1\right) - 116 = 0$

$\Leftrightarrow 25(x-2)^2 + 9(y-1)^2 - 100 - 9 - 116 = 0$

$\Leftrightarrow 25(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 225 \,|\!: 225$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$

Posons :

$\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X+2 \\ y = Y+1 \end{cases}$

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, le centre de Γ est $\Omega(2,1)$.

$\boxed{\text{dans le repère } (\Omega,\vec{i},\vec{j}) :}$

$\Gamma \equiv \dfrac{X^2}{9} + \dfrac{Y^2}{25} = 1$

Γ est une ellipse de centre Ω, d'axe focal $m \equiv X = 0$,

$a = 3$, $b = 5$, $c^2 = b^2 - a^2 = 16 \Leftrightarrow c = 4$ excentricité $e = \dfrac{4}{5}$

Sommets : $S_1(0,5), S_2(0,-5), S_3(3,0), S_4(-3,0)$

Foyers : $F_1(0,4), F_2(0,-4)$

Directrices : $d_1 \equiv Y = \dfrac{25}{4}, d_2 \equiv Y = -\dfrac{25}{4}$

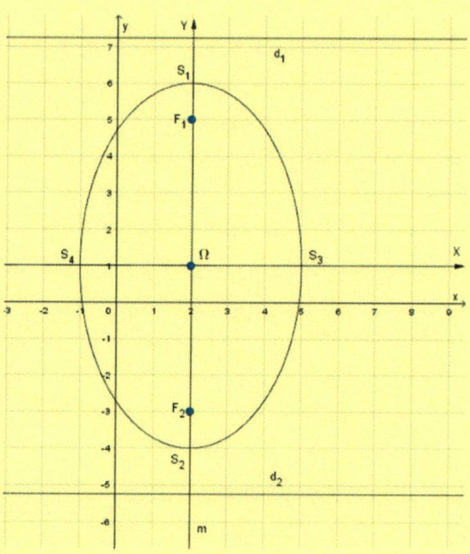
$\boxed{\text{dans le repère } (O,\vec{i},\vec{j}) :}$

axe focal $m \equiv x = 2$

Sommets : $S_1(2,6), S_2(2,-4), S_3(5,1), S_4(-1,1)$

Foyers : $F_1(2,5), F_2(2,-3)$

Directrices : $d_1 \equiv y - 1 = \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow y = \dfrac{29}{4}, d_2 \equiv y - 1 = -\dfrac{25}{4} \Leftrightarrow y = -\dfrac{21}{4}$



Equation de Γ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$:

$\dfrac{X^2}{9} + \dfrac{Y^2}{25} = 1$

$\Leftrightarrow Y^2 = 25\left(1 - \dfrac{X^2}{9}\right)$

$\Leftrightarrow Y = \dfrac{5}{3}\sqrt{9 - X^2}$ ou $Y = -\dfrac{5}{3}\sqrt{9 - X^2}$

X	0	1	2	3
$\frac{5}{3}\sqrt{9-X^2}$	5	4,7	3,7	0

b) $y=5 \Leftrightarrow Y=4$

$\boxed{\text{dans le repère } (\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath}) :}$

$$A(X,4)\in\Gamma \Leftrightarrow \frac{X^2}{9}+\frac{16}{25}=1$$
$$\Leftrightarrow X^2=\frac{81}{25}$$
$$\Leftrightarrow X=\frac{9}{5} \text{ ou } X=-\frac{9}{5}$$

Les points dont l'ordonnée est 4 sont $I_1\left(\frac{9}{5},4\right)$ et $I_2\left(-\frac{9}{5},4\right)$.

tangente t_1 au point $I_1\left(\frac{9}{5},4\right)$:

$$t_1\equiv\frac{9}{5}\frac{X}{9}+\frac{4Y}{25}=1\Leftrightarrow\frac{9X}{45}+\frac{4Y}{25}=1\Leftrightarrow\frac{4Y}{25}=1-\frac{9X}{45}\Leftrightarrow Y=-\frac{5}{4}X+\frac{25}{4}$$

tangente t_2 au point $I_2\left(-\frac{9}{5},4\right)$:

$$t_1\equiv-\frac{9}{5}\frac{X}{9}+\frac{4Y}{25}=1\Leftrightarrow-\frac{9X}{45}+\frac{4Y}{25}=1\Leftrightarrow\frac{4Y}{25}=1+\frac{9X}{45}\Leftrightarrow Y=\frac{5}{4}X+\frac{25}{4}$$

$\boxed{\text{dans le repère } (O,\vec{\imath},\vec{\jmath}) :}$

$$t_1\equiv y-1=-\frac{5}{4}(x-2)+\frac{25}{4}\Leftrightarrow y=-\frac{5}{4}x+\frac{39}{4}$$
$$t_2\equiv y-1=\frac{5}{4}(x-2)+\frac{25}{4}\Leftrightarrow y=\frac{5}{4}x+\frac{19}{4}$$

c) dans le repère $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

$$P(X,Y)\in t_1\cap t_2\Leftrightarrow-\frac{5}{4}X+\frac{25}{4}=\frac{5}{4}X+\frac{25}{4}\Leftrightarrow\frac{10}{4}X=0\Leftrightarrow X=0$$

Alors $Y=\frac{25}{4}$ et $P\left(0,\frac{25}{4}\right)\in d_1$.

2. $F_1F_2=20\Leftrightarrow 2c=20\Leftrightarrow c=10$

Il s'agit d'une hyperbole dont les asymptotes sont $a_1\equiv y=x$ et $a_2\equiv y=-x$.

$$\frac{b}{a}=1\Leftrightarrow a=b$$
$$c^2=a^2+b^2\Leftrightarrow 100=2a^2\Leftrightarrow a^2=50$$

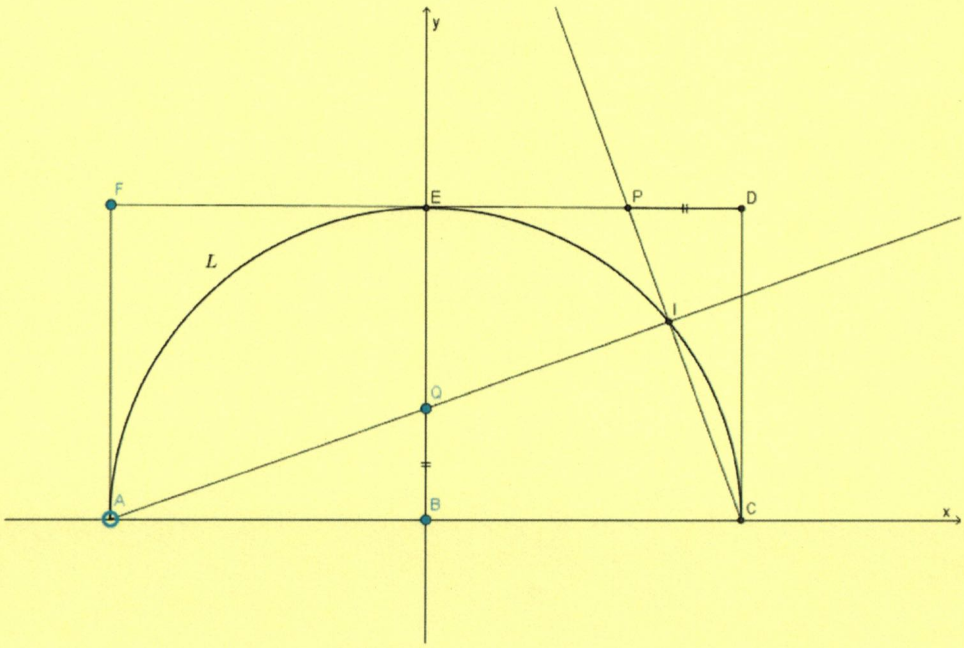
Premier cas : Si l'axe focal est l'axe des abscisses

$$\Gamma\equiv\frac{x^2}{50}-\frac{y^2}{50}=1$$

Deuxième cas : Si l'axe focal est l'axe des ordonnées

$$\Gamma\equiv\frac{x^2}{50}-\frac{y^2}{50}=-1$$

Question IV (14 points)



Prenons le repère orthonormé $(B,\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE})$.

Dans ce repère, posons $Q(0,m)$ avec $m \geq 0$.

On a aussi : $A(-1,0)$, $C(1,0)$ et $P(1-m,1)$.

$$M(x,y) \in (AQ) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \text{ colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ y & m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow m(x+1) - y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = mx + m$$

$$\Leftrightarrow mx - y + m = 0 \quad \text{(AQ)}$$

$$M(x,y) \in (CP) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CP}\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} \text{ colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -m \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + my = 0 \quad \text{(CP)}$$

$$L = \left\{ I(x,y) \middle| \{I\} = (AQ) \cap (CP) \right\}$$

$$I(x,y) \in L \Leftrightarrow \begin{cases} mx - y + m = 0 & (1) \\ x + my - 1 = 0 & (2) \end{cases} \qquad m \geq 0$$

$\boxed{\text{Si } y \neq 0 :}$

De (2) : $m = \dfrac{1-x}{y}$

Dans (1) :

$\dfrac{1-x}{y}x - y + \dfrac{1-x}{y} = 0 \,|\cdot y$

$\Leftrightarrow x - x^2 - y^2 + 1 - x = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad (*)$

$\boxed{\text{Si } y = 0 :}$

Le système s'écrit :

$\begin{cases} mx + m = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Donc $C(1,0) \in L$.

Remplaçons $y = 0$ dans l'équation (*) :

$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

On trouve les points $C(1,0)$ et $A(-1,0)$.

$C(1,0) \in L$ et $A(-1,0) \notin L$.

Examinons la condition $m \geq 0$.

Si $y \neq 0$, alors $m = \dfrac{1-x}{y} \geq 0$

$\Leftrightarrow (1 - x \geq 0 \text{ et } y > 0)$ ou $(1 - x \leq 0 \text{ et } y < 0)$

$\Leftrightarrow (x \leq 1 \text{ et } y > 0)$ ou $(x \geq 1 \text{ et } y < 0)$

ou bien :

$\boxed{\text{Si } x \neq -1 :}$

De (1) : $m = \dfrac{y}{x+1}$

Dans (2) :

$x + \dfrac{y}{x+1}y - 1 = 0 \,|\cdot(x+1)$

$\Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \quad (*)$

$\boxed{\text{Si } x = -1 :}$

Le système s'écrit :

$\begin{cases} -m - y + m = 0 \\ my - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -2 = 0 \quad \text{impossible} \end{cases}$

Donc $A(-1,0) \notin L$.

Remplaçons $x = -1$ dans l'équation (*) :

$1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 0$

On trouve le point $A(-1,0)$ et $A(-1,0) \notin L$.

Examinons la condition $m \geq 0$.

Si $x \neq -1$, alors $m = \dfrac{y}{x+1} \geq 0$

$\Leftrightarrow (y \geq 0 \text{ et } x + 1 > 0)$ ou $(y \leq 0 \text{ et } x + 1 < 0)$

$\Leftrightarrow (y \geq 0 \text{ et } x > -1)$ ou $(y \leq 0 \text{ et } x < -1)$

Finalement L est le cercle de centre B et de rayon 1, limité au premier et deuxième quadrant, privé du point A.

$L = \left\{ I(x,y) \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y \geq 0 \right\} \setminus \{\text{A}\}$