I) 1) $P(z) = z^3 + a z^2 + b z + 15 - 15i$

a) $P(3i) = 0 \Leftrightarrow -27i - 9a + 3bi + 15 - 15i = 0$

$\Leftrightarrow -9a + 3bi = -15 + 42i \quad | :3$

$P(-1) = 10 - 10i \Leftrightarrow -1 + a - b + 15 - 15i = 10 - 10i$

$\Leftrightarrow a - b = -4 + 5i$

$$\begin{cases} -3a + bi = -5 + 14i & (1) \\ a - b = -4 + 5i & (2) \quad | \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3a + bi = -5 + 14i \\ 3a - 3b = -12 + 15i \end{cases} \Bigg| +$$

$(-3 + i)\, b = -17 + 29i$

$$b = \frac{-17 + 29i}{-3 + i} \cdot \frac{-3 - i}{-3 - i}$$

$$= \frac{51 + 17i - 87i + 29}{9 + 1} = \frac{80 - 70i}{10}$$

$b = 8 - 7i$

Dans (2) : $a - 8 + 7i = -4 + 5i$

$a = 4 - 2i$

b) $P(z) = z^3 + (4 - 2i) z^2 + (8 - 7i) z + 15 - 15i$

d'après a), $3i$ est une solution de l'éq. $P(z) = 0$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4-2i & 8-7i & 15-15i \\ 3i & & 3i & -3+12i & -15+15i \\ \hline & 1 & 4+i & 5+5i & \| \; 0 \end{array}$$

$P(z) = (z - 3i)\,[z^2 + (4+i) z + (5+5i)]$

$\Delta = (4+i)^2 - 4(5+5i) = 16 + 8i - 1 - 20 - 20i$

$= -5 - 12i$

pos : $t = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$ racine carrée de Δ

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy\, i = -5 - 12i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 & (1) \\ x^2 - y^2 = -5 & (2) \\ x y < 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) : 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$(1) - (2) : 2y^2 = 18 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$

D'après (3) : racines carrées de Δ : $t_1 = 2-3i$

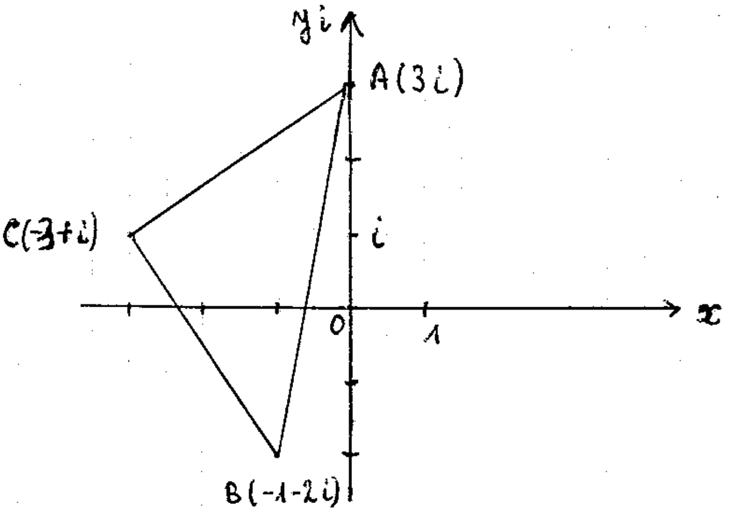
$t_2 = -2+3i$

$$z_1 = \frac{-4-i+2-3i}{2} = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i$$

$$z_2 = \frac{-4-i-2+3i}{2} = \frac{-6+2i}{2} = -3+i$$

$$S = \{3i \,;\, -1-2i \,;\, -3+i\}$$

c)



$AB = |-1-2i-3i| = |-1-5i| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

$AC = |-3+i-3i| = |-3-2i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$BC = |-3+i+1+2i| = |-2+3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ $\Big\}$ le $\Delta(ABC)$ est isocèle de sommet principal C

On a : $AB^2 = AC^2 + BC^2$, car $26 \overset{!}{=} 13+13$

$\Rightarrow$ le $\Delta(ABC)$ est rectangle en C.

Donc le $\Delta(ABC)$ est isocèle et rectangle en C.

2) $A(-2-2i) \xmapsto{h} A' \xmapsto{r} B(4)$, $\quad A \xmapsto{r \circ h} B$

$A' = h(A) \Leftrightarrow z_{A'} = \alpha(-2-2i)$

$B = r(A') \Leftrightarrow 4 = \text{cis}\,\beta \cdot z_{A'}$

$\Leftrightarrow 4 = \text{cis}\,\beta \cdot \alpha(-2-2i)$

$\Leftrightarrow \alpha\,\text{cis}\,\beta = \dfrac{4}{-2-2i} = -\dfrac{2}{1+i} \cdot \dfrac{1-i}{1-i}$

$\Leftrightarrow \alpha\,\text{cis}\,\beta = -\dfrac{2(1-i)}{2}$

$\Leftrightarrow \alpha\,\text{cis}\,\beta = -1+i$

$|-1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$$

$$\Rightarrow \alpha \operatorname{cis}\beta = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$$

1) $\underline{\alpha = \sqrt{2}}$ $\Rightarrow \underline{\beta = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)}$

2) $\underline{\alpha = -\sqrt{2}}$ $\Rightarrow -\sqrt{2}\operatorname{cis}\beta = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\operatorname{cis}(\beta+\pi) = \sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{\beta = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)}$$

II) 1) nombre de cas possibles $= C_{32}^{13} = 347'373'600$

a) A : (as de pique et 3 piques non as et 9 cartes ni as, ni pique) ou (1 as non pique et 4 piques non as et 8 cartes ni as, ni pique)

nombre de cas favorables $= 1 \cdot C_7^3 \cdot C_{21}^9 + C_3^1 \cdot C_7^4 \cdot C_{21}^8$

$= 35 \cdot 293930 + 3 \cdot 35 \cdot 203490 = 10'287'550 + 21'366'450$

$= 31'654'000$

$$p(A) = \frac{31'654'000}{347'373'600} = \frac{11305}{124062} \simeq 0{,}091$$

b) nombre de cas favorables $= C_8^5 \cdot C_8^4 \cdot C_8^3 \cdot C_8^1 \cdot 4!$

$= 56 \cdot 70 \cdot 56 \cdot 8 \cdot 24 = 42'147'840$

$$p(B) = \frac{42'147'840}{347'373'600} = \frac{12544}{103385} \simeq 0{,}121$$

2) a) $C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^{n-2} + \ldots + C_{n-1}^{1} + C_{n-1}^{0}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}\, 1^{n-1-k}\, 1^{k}$$

$$= (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$$

b) $C_n^{n-1} + 2\,C_n^{n-2} + 3\,C_n^{n-3} + \ldots + (n-1)\,C_n^1 + n\,C_n^0$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\, C_n^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\,\frac{n!}{(n-k)!\,(\cancel{n}-\cancel{n}+k)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{k}\; n!}{\cancel{k}(k-1)!\,(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n\,(n-1)!}{(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]!}$$

$$= n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} = n\,(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \ldots + C_{n-1}^{n-1})$$

$$= n\;2^{n-1}$$

3) a) X_1 = gain du joueur après un lancer de la paire de dés

$p(X_1 = 3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ $\quad p(X_1 = 1) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ $\quad p(X_1 = -5) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

X = gain du joueur après deux lancers

Loi de probabilité de X :

$p(X = 6) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$p(X = 4) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$p(X = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$p(X = -2) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$p(X = -4) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$p(X = -10) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

b) $E(X) = 6 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{8} - 4 \cdot \frac{1}{4} - 10 \cdot \frac{1}{16}$

$= \frac{3}{8} \cancel{+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cancel{-1} - \frac{5}{8}$

$= 0$

$\Rightarrow$ Le jeu est équilibré pour le joueur.

III) 1) $C : \quad y = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$

$\Leftrightarrow \quad y - 2 = -\frac{3}{2}\sqrt{x+1} \quad (\ )^2$ Cond : $x \geq -1$ et $y \leq 2$

$\Leftrightarrow \quad (y-2)^2 = \frac{9}{4}(x+1)$ et $x \geq -1$ et $y \leq 2$

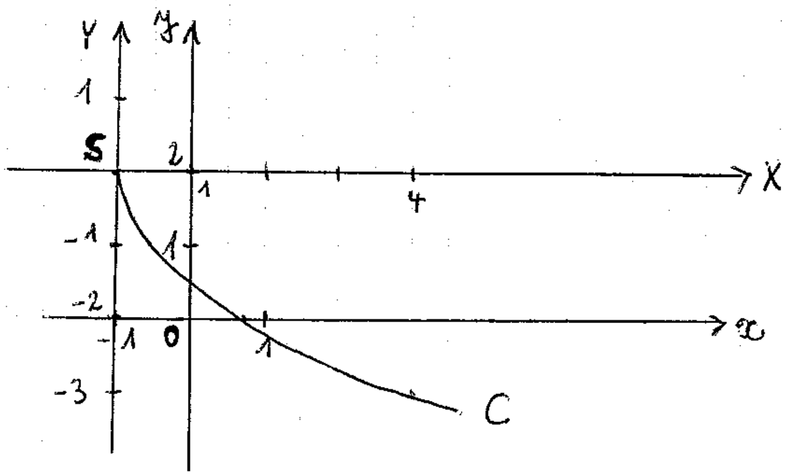
$\Leftrightarrow \quad x + 1 = \frac{4}{9}(y-2)^2$ et $x \geq -1$ et $y \leq 2$

pos : $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

$X = \frac{4}{9} Y^2$ et $Y \leq 0$

C est une demi-parabole de sommet $S(-1, 2)$ et d'axe focal (SX).

X	0	$\frac{4}{9}$ $\simeq 0{,}44$	$\frac{16}{9}$ $\simeq 1{,}78$	4
Y	0	-1	-2	-3



2) $\Gamma : 9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$

a) $\Leftrightarrow 9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 2y + 1) = 36$

$\Leftrightarrow 9(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 36 \quad | : 36$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$ éq. réduite de Γ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$

pos : $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y + 1 \end{cases} \Rightarrow$ centre $\Omega(2, -1)$

$\dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{9} = 1$ éq. réduite de Γ dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

Γ est une ellipse d'axe focal (ΩY).

$a = 2, \quad b = 3$

$c^2 = b^2 - a^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

éléments de Γ	dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$	dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
centre	$\Omega(0,0)$	$\Omega(2,-1)$
sommets	$S_1(0,3)$, $S_2(0,-3)$ $S_3(2,0)$, $S_4(-2,0)$	$S_1(2,2)$, $S_2(2,-4)$ $S_3(4,-1)$, $S_4(0,-1)$
foyers	$F(0,\sqrt{5})$, $F'(0,-\sqrt{5})$	$F(2,\sqrt{5}-1)$, $F'(2,-\sqrt{5}-1)$
directrices	$d_1 : Y = \frac{b^2}{c} = \frac{9}{\sqrt{5}}$ $Y = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ $d_2 : Y = -\frac{9\sqrt{5}}{5}$	$d_1 : y + 1 = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ $y = \frac{9\sqrt{5} - 5}{5}$ $d_2 : y = \frac{-9\sqrt{5} - 5}{5}$

b) $t : x = -1$ est impossible

$t : y = mx + p \qquad A(-1,-1) \in t \Leftrightarrow -1 = -m + p$

$\Leftrightarrow p = m - 1$

$\Rightarrow t : y = mx + m - 1$

$t \cap \Gamma : \begin{cases} 9(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 36 & (1) \\ y = mx + m - 1 & (2) \end{cases}$

(2) dans (1) : $9(x-2)^2 + 4(mx + m \cancel{-1} \cancel{+1})^2 = 36$

$9(x^2 - 4x + 4) + 4(m^2x^2 + 2m^2x + m^2) = 36$

$9x^2 - 36x + \cancel{36} + 4m^2x^2 + 8m^2x + 4m^2 = \cancel{36}$

$\underbrace{(9 + 4m^2)}_{\neq 0}x^2 + (8m^2 - 36)x + 4m^2 = 0$

$\Delta = (8m^2-36)^2 - 4\cdot(9+4m^2)\cdot 4m^2$

$= \cancel{64m^4} - 576m^2 + 1296 - 144m^2 - \cancel{64m^4}$

$= 1296 - 720m^2 = 144(9-5m^2)$

t est tangente à $\Gamma \iff \Delta = 0 \iff 9-5m^2=0 \iff 5m^2=9$

$\iff m^2 = \frac{9}{5} \iff m = \pm\frac{3}{\sqrt5} = \pm\frac{3\sqrt5}{5}$

Dans (2) : $t_1 : y = \frac{3\sqrt5}{5}x + \frac{3\sqrt5}{5} - 1$

$t_2 : y = -\frac{3\sqrt5}{5}x - \frac{3\sqrt5}{5} - 1$

IV) 1) $C : \begin{cases} x = \frac{2}{\cos t} \\ y = 3\tan t \end{cases}, \ t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[$ Cond : $\cos t \neq 0 \iff t \neq \frac{\pi}{2}$

$\iff \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos t} \\ \frac{y}{3} = \tan t \end{cases}, \ t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

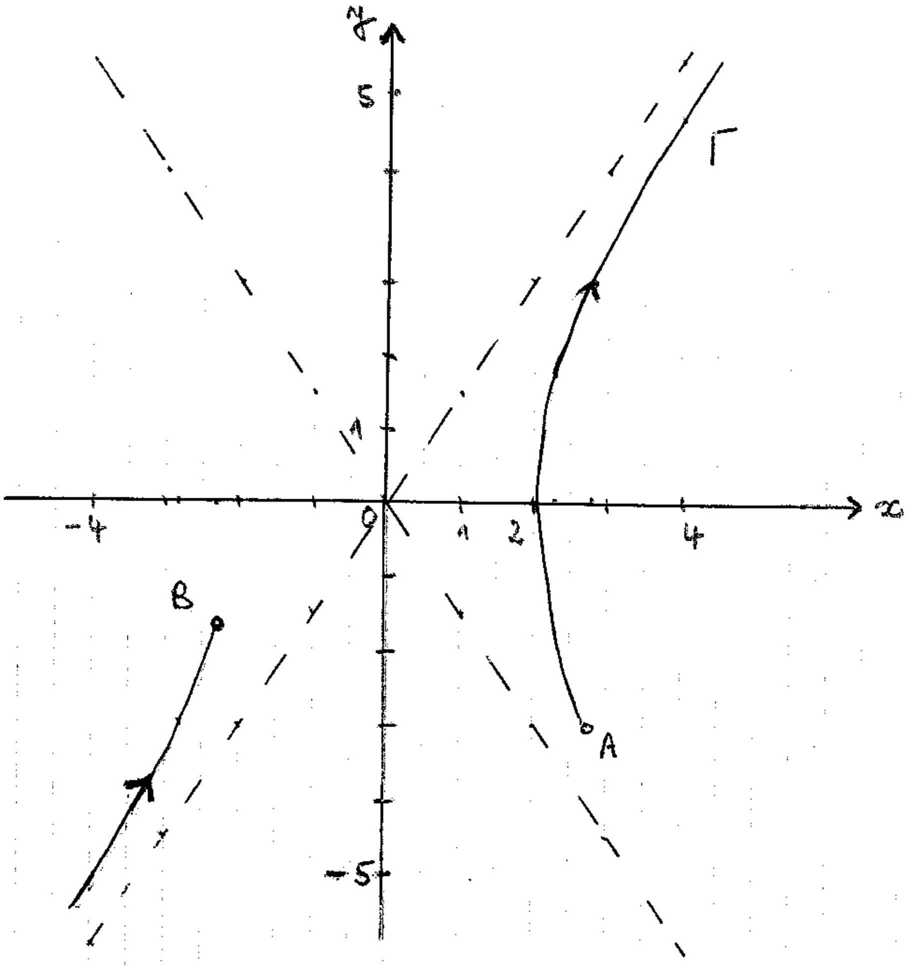
On a : $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \iff 1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2$

$\iff \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

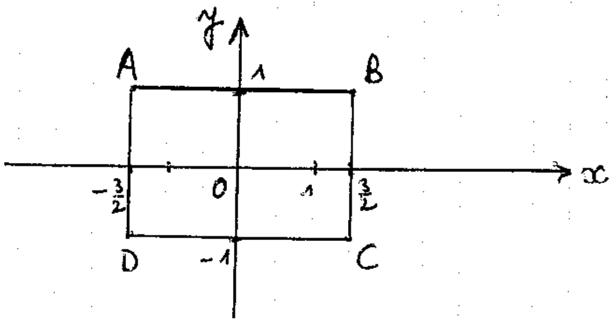
C est une partie de l'hyperbole $\mathcal{H} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ de centre $O(0,0)$ et d'axe focal (Ox) et d'asymptotes d'éq. $y = \pm\frac{3}{2}x$.

t	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
x	2,8	2,3	2	2,3	2,8	4	‖	−4	−2,8	−2,3
y	−3	−1,7	0	1,7	3	5,2	‖	−5,2	−3	−1,7

Γ est la réunion de deux arcs ouverts de l'hyperbole $\mathcal{H}$ de points limites $A(2\sqrt2, -3)$ et $B\left(-\frac{4\sqrt3}{3}, -\sqrt3\right)$.



2) a)



$$L_k = \{ M \in \Pi \,/\, d(M,(AB))^2 + d(M,(BC))^2 + d(M,(CD))^2 + d(M,(DA))^2 = k \}$$

$(AB) : y = 1 \qquad (BC) : x = \frac{3}{2} \qquad (CD) : y = -1 \qquad (DA) : x = -\frac{3}{2}$

$$M \in L_k \iff |y-1|^2 + |x - \tfrac{3}{2}|^2 + |y+1|^2 + |x + \tfrac{3}{2}|^2 = k$$

$$\iff y^2 \cancel{-2y} + 1 + x^2 \cancel{-3x} + \tfrac{9}{4} + y^2 \cancel{+2y} + 1 + x^2 \cancel{+3x} + \tfrac{9}{4} = k$$

$$\iff 2x^2 + 2y^2 = k - \tfrac{13}{2}$$

$$\iff x^2 + y^2 = \frac{2k-13}{4}$$

<u>Analyse de L_k :</u>

<u>$k < \frac{13}{2}$</u> : $L_k = \emptyset$

<u>$k = \frac{13}{2}$</u> : $L_k = \{ O(0,0) \}$

<u>$k > \frac{13}{2}$</u> : L_k = cercle de centre O et de rayon $r_k = \frac{\sqrt{2k-13}}{2}$

b) L_k passe par les 4 sommets du rectangle $\Leftrightarrow r_k = OB$

$\Leftrightarrow r_k^2 = OB^2 \qquad B\left(\frac{3}{2}, 1\right) \Rightarrow OB^2 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2k-13}{4} = \dfrac{13}{4}$

$\Leftrightarrow 2k = 26$

$\Leftrightarrow k = 13$

L_{13} = cercle $\mathcal{C}\left(O, \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$