LE GOUVERNEMENT
DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG
Ministère de l'Éducation nationale,
de l'Enfance et de la Jeunesse

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES 2018

BRANCHE	SECTION(S)	ÉPREUVE ÉCRITE
Mathématiques I	**B**	*Durée de l'épreuve :* *3 heures* *Date de l'épreuve :* *17 septembre 2018*

Question I (10+5 = **15 points**)

1) Soit $P(z) = z^3 + a\,z^2 + b\,z + 15 - 15i$ avec a et b complexes.

a) Déterminer a et b sachant que $3i$ est une racine de $P(z)$ et que le reste de la division de $P(z)$ par $z + 1$ est $10 - 10i$.

b) Résoudre ensuite $P(z) = 0$ en remplaçant a et b par les valeurs trouvées dans **a)**.

c) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé représenter les points A, B et C dont les affixes sont les solutions de l'équation $P(z) = 0$. Déterminer la nature du triangle ABC. Justifier la réponse.

2) Soient α et β des nombres réels. Dans le plan de Gauss, on donne les points $A(-2 - 2i)$ et $B(4)$. Soit h une homothétie de centre O et de rapport α et r une rotation de centre O et d'angle β. Déterminer toutes les possibilités pour α et β tels que $(r \circ h)(A) = B$.

Question II (5+5+5 = **15 points**)

1) Dans un jeu de 32 cartes, on choisit au hasard une main de 13 cartes. Calculer la probabilité des événements suivants :

a) A : obtenir une main comprenant exactement un as et 4 piques.

b) B : obtenir une main comprenant 5 cartes d'une première couleur, 4 cartes d'une deuxième couleur, 3 cartes d'une troisième couleur et une carte de la couleur restante.

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Démontrer que $C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^{n-2} + \cdots + C_{n-1}^{1} + C_{n-1}^{0} = 2^{n-1}$.

b) Calculer $C_n^{n-1} + 2C_n^{n-2} + 3C_n^{n-3} + \cdots + (n-1)C_n^1 + nC_n^0$. (On pourra utiliser **a)**).

3) Un joueur lance une paire de dés discernables bien équilibrés. Il gagne 3 € s'il obtient 2 chiffres pairs, il gagne 1 € s'il obtient 1 chiffre pair et il perd 5 € s'il n'obtient aucun chiffre pair. Il répète le lancer de la paire de dés deux fois. Soit X le gain du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X pour conclure si ce jeu est équilibré, favorable ou défavorable au joueur.

<u>Question III</u> (4+11 = **15 points**)

1) Identifier la courbe C d'équation $y = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{x+1}$ et tracer-la dans un repère orthonormé du plan (unité : 1 cm).

2) Soit Γ la conique d'équation cartésienne $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$ dans un repère orthonormé *R*.

a) Déterminer sa nature, son équation cartésienne réduite, son centre, ses sommets, ses foyers et une équation cartésienne de ses directrices dans *R*.

b) Déterminer une équation des tangentes à Γ passant par $A(-1,-1)$.

<u>Question IV</u> (6+9 = **15 points**)

1) Soit C la courbe définie par : $\begin{cases} x = \frac{2}{\cos t} \\ y = 3\tan t \end{cases}, t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[- \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Identifier C et représenter graphiquement C dans un repère orthonormé.

2) a) On considère un rectangle dont la largeur vaut les $\frac{2}{3}$ de sa longueur . Déterminer et analyser le lieu L_k des points dont la somme des carrés des distances aux quatre côtés de ce rectangle est une constante *k* donnée.

b) Déterminer *k* pour que le lieu passe par les quatre sommets du rectangle. Quel est le lieu dans ce cas ?