Corrigé – Examen Mathématiques I Section B

Question I

1) a)

$$P(i) = i^3 - (m+i+2mi)i^2 + \left(-2m+mi+2m^2i\right)\cdot i + 2m^2$$
$$= -i + m + i + 2mi - 2mi - m - 2m^2 + 2m^2$$
$$= 0$$

b) Schéma de Horner :

	1	$-m-i-2mi$	$-2m+mi+2m^2i$	$2m^2$
i		i	$2m-mi$	$-2m^2$
	1	$-m-2mi$	$2m^2i$	0

$$P(z) = (z-i)\cdot\underbrace{\left(z^2-(m+2mi)z+2m^2i\right)}_{Q(z)}$$

Déterminons les racines de Q :

$$\Delta = (m+2mi)^2 - 4\cdot 2m^2i = m^2+4m^2i-4m^2-8m^2i = -3m^2-4m^2i = (3+4i)\cdot\left(-m^2\right)$$

Calculons les racines carrées de $3+4i$:

$$\boldsymbol{\delta}^2 = (x+yi)^2 = 3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=4 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

On trouve $\boldsymbol{\delta} = 2+i$ *ou* $\boldsymbol{\delta} = -2-i$. D'autre part les racines carrées de $-m^2$ sont $\pm mi$.

Les racines carrées de Δ sont : $-m+2mi$ et $m-2mi$

Les racines de Q sont : $\dfrac{m+2mi+m-2mi}{2} = m$ *et* $\dfrac{m+2mi-m+2mi}{2} = 2mi$

c) Soit A(i), B(2mi) et C(m).

Le triangle ABC est rectangle en C ssi $\left(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}}\right) = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{2} + k\boldsymbol{\pi}\ (k\in\mathbb{Z})$

ssi $arg\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C} = \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{2} + k\boldsymbol{\pi}\ (k\in\mathbb{Z})$

Or
$$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C} = \frac{i-m}{2mi-m}\cdot\frac{2mi+m}{2mi+m}$$
$$= \frac{-2m+mi-2m^2i-m^2}{-4m^2-m^2}$$
$$= \frac{-m(2+m-i+2mi)}{-5m^2}$$
$$= \frac{(2+m)+(2m-1)i}{5m} \quad (m\neq 0)$$

$$arg\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \iff \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \text{ est un imaginaire pur et } 2m - 1 \neq 0$$

$$\iff 2 + m = 0 \ et \ 2m - 1 \neq 0$$

$$\iff m = -2$$

2) Soit $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|z-3| = \tfrac{\sqrt{2}}{2}|z-5| \iff |z-3|^2 = \tfrac{1}{2}|z-5|^2$$

$$\iff (x-3)^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}(x-5)^2 + \tfrac{1}{2}y^2$$

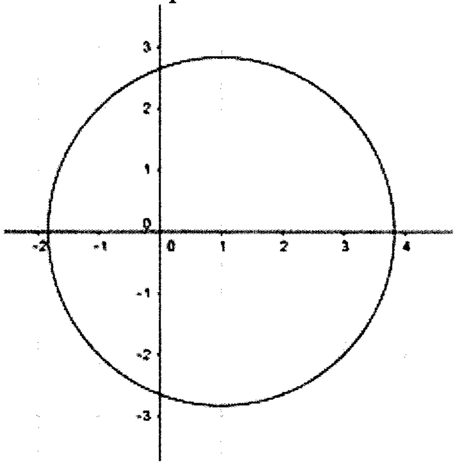
$$\iff x^2 - 6x + 9 + y^2 = \tfrac{1}{2}x^2 - 5x + \tfrac{25}{2} + \tfrac{1}{2}y^2$$

$$\iff \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 - x - \tfrac{7}{2} = 0$$

$$\iff x^2 + y^2 - 2x - 7 = 0$$

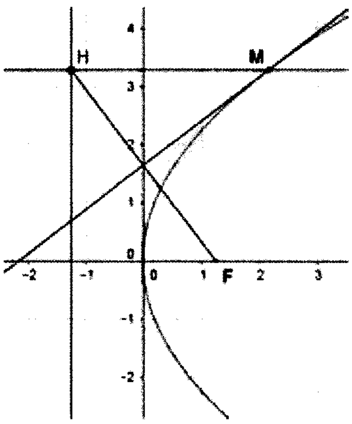
$$\iff (x-1)^2 + y^2 = 8$$

L'ensemble de points cherchés est le cercle de centre $\Omega(1\ ;0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.



Question II

1) On place la parabole dans un RON tel que $P \equiv y^2 = 2px$. Alors $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ et $d \equiv x = -\frac{p}{2}$.



Soit $M(x_M;y_M)\in P$ c-à-d. $y_M^2=2px_M$; $H\left(-\frac{p}{2};y_M\right)$.

Soit t la tangente à P en M : $t\equiv y\cdot y_M=px+px_M$

Soit $I=mil[FH]$, alors $I\left(0;\frac{y_M}{2}\right)$.

Vérifions que t passe par I :

$$I\in t \Leftrightarrow \frac{y_M}{2}\cdot y_M=p\cdot 0+p\cdot x_M$$

$$\Leftrightarrow \frac{2px_M}{2}=0+p\cdot x_M \quad \text{vrai!}$$

Vérifions que t est perpendiculaire à (FH) :

Vecteur directeur de t : $\vec{u}(y_M;p)$

Vecteur directeur de (FH) : $\overrightarrow{FH}(-p;y_M)$

Donc $\vec{u}\cdot\overrightarrow{FH}=0$ et $t\perp(FH)$.

Par conséquent, t est bien la médiatrice de [FH].

2) a) Centre de l'hyperbole : $C(2;1)$

Considérons le repère orthonormé $R'=\left(C,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $M(x,y)_R$ et $M(X,Y)_{R'}$, alors on a $\begin{cases} X=x-2 \\ Y=y-1 \end{cases}$.

Dans le repère R', on a $F(3,0)$ et $F'(-3,0)$, donc $c=3$,

$S(1,0)$, donc a=1 .

Axe focal : (CX)

$b^2=c^2-a^2=9-1=8$ et $b=2\sqrt{2}$

Dans le repère R', $\mathbb{H}\equiv X^2-\frac{Y^2}{8}=1$

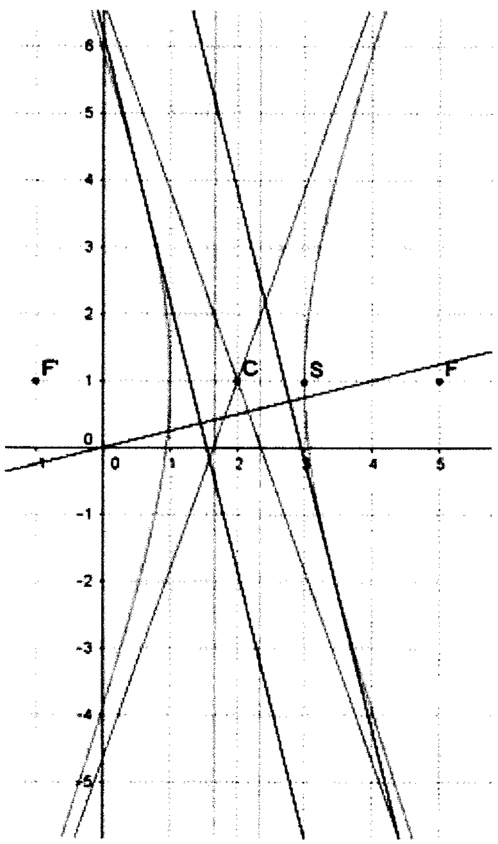
Dans le repère R , $\mathbb{H}\equiv(x-2)^2-\frac{(y-1)^2}{8}=1$

b) Excentricité : $\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{c}{a}=3$

$R'=\left(C,\vec{i},\vec{j}\right)$	$R=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$
Directrices : $d\equiv X=\frac{a^2}{c}\Leftrightarrow X=\frac{1}{3}$ $d'\equiv X=-\frac{a^2}{c}\Leftrightarrow X=-\frac{1}{3}$ A.O. $Y=\frac{b}{a}X\Leftrightarrow Y=2\sqrt{2}X$ $Y=-\frac{b}{a}X\Leftrightarrow Y=-2\sqrt{2}X$	$d\equiv x=\frac{7}{3}$ $d'\equiv x=\frac{5}{3}$ $y-1=2\sqrt{2}(x-2)\Leftrightarrow y=2\sqrt{2}x+1-4\sqrt{2}$ $y-1=-2\sqrt{2}(x-2)\Leftrightarrow y=-2\sqrt{2}x+1+4\sqrt{2}$

c)

X	1	2	3
Y	0	$\pm2\sqrt{6}$	±8



d) Dans le repère R' :

Equation de la tangente t à $\mathbb{H}$ en un point $A(X_A,Y_A)$: $X_AX-\frac{Y_AY}{8}=1$

Vecteur directeur de t : $\vec{u}\left(\frac{Y_A}{8},X_A\right)$

Vecteur directeur de δ : $\vec{v}\left(1,\frac{1}{4}\right)$

$t\perp\boldsymbol{\delta}\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\frac{Y_A}{8}+X_A\cdot\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow Y_A=-2X_A$

Le point de contact A est aussi un point de $\mathbb{H}$.

$A\in\mathbb{H}\Leftrightarrow X_A^2-\frac{Y_A^2}{8}=1\Leftrightarrow X_A^2-\frac{4X_A^2}{8}=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}X_A^2=1\Leftrightarrow X_A=\sqrt{2}$ ou $X_A=-\sqrt{2}$

Points de contact : $A_1\left(\sqrt{2},-2\sqrt{2}\right)$ et $A_2\left(-\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$

Equations des tangentes perpendiculaires à δ :

$t_1\equiv\sqrt{2}X+\frac{2\sqrt{2}Y}{8}=1\Leftrightarrow Y=-4X+2\sqrt{2}$

$t_2\equiv-\sqrt{2}X-\frac{2\sqrt{2}Y}{8}=1\Leftrightarrow Y=-4X-2\sqrt{2}$

Dans le repère R :

$t_1\equiv y-1=-4(x-2)+2\sqrt{2}\Leftrightarrow y=-4x+9+2\sqrt{2}$

$t_2\equiv y-1=-4(x-2)-2\sqrt{2}\Leftrightarrow y=-4x+9-2\sqrt{2}$

Question III

1) a) 1°) $\frac{4^6}{5^6}=\frac{4096}{15625}\simeq 0,26$

2°) $\frac{4^4\cdot C_6^2}{5^6}=\frac{3840}{15625}=\frac{768}{3125}\simeq 0,25$

3°) $\frac{4^3}{5^6}=\frac{64}{15625}=0,004096$

b) 1°) Chaque élève répond à ce questionnaire. Cette expérience est une épreuve de Bernoulli avec deux résultats possibles : succès (= aucune réponse correcte) ou échec (au moins une réponse correcte).
Si les 25 élèves de la classe répondent au questionnaire, l'expérience se répète 25 fois dans les mêmes conditions et on a un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n=25$ et $p=\frac{4096}{15625}$.

2°)
$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)$$
$$=C_{25}^0\cdot\left(\tfrac{4096}{15625}\right)^0\cdot\left(\tfrac{11529}{15625}\right)^{25}+C_{25}^1\cdot\left(\tfrac{4096}{15625}\right)^1\cdot\left(\tfrac{11529}{15625}\right)^{24}$$
$$\simeq 0,0049$$

3°) $E(X)=25\cdot\frac{4096}{15625}=\frac{4096}{625}\simeq 6,55$

2) a) Les valeurs prises par X sont : 1, 2, 3 ou -5.

$P(X=1)=\frac{1}{6}$

$P(X=2)=\frac{1}{6}$

$P(X=3)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$

$P(X=-5)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

X_i	1	2	3	-5
$P(X=X_i)$	$1/6$	$1/6$	$5/12$	$1/4$

b) $E(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{5}{12}+(-5)\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}>0$

Donc le jeu est favorable au joueur.

3) a) $\frac{8\cdot C_4^2\cdot C_{28}^1+8\cdot C_4^3}{C_{32}^3}=\frac{1344+32}{4960}=\frac{43}{155}\simeq 0,28$

b) Soit A l'événement « obtenir exactement un valet »,

B l'événement « obtenir exactement deux trèfles ».

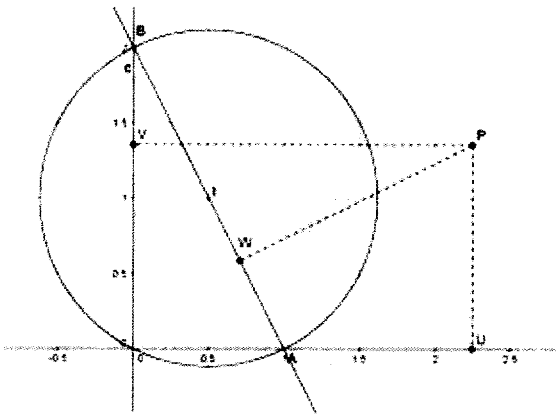
$P(A)=\frac{4\cdot C_{28}^2}{C_{32}^3}=\frac{1512}{4960}=\frac{189}{620}\simeq 0,30$

$$P(B)=\frac{C_8^2\cdot C_{24}^1}{C_{32}^3}=\frac{672}{4960}=\frac{21}{155}\simeq 0{,}14$$

$$P(A\cap B)=\frac{1\cdot C_7^1\cdot C_{21}^1+C_3^1\cdot C_7^2}{C_{32}^3}=\frac{147+63}{4960}=\frac{21}{496}\simeq 0{,}04$$

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{189}{620}+\frac{21}{155}-\frac{21}{496}=\frac{987}{2480}\simeq 0{,}40\end{aligned}$$

Question IV



a) Si *P* est un point d'intersection de deux droites choisies parmi *(OA)*, *(OB)* et *(AB)*, alors deux des projetés orthogonaux *U*, *V* et *W* sont confondus (avec *P*). Par conséquent, *U*, *V* et *W* sont alignés dans ce cas car ce ne sont plus que deux points distincts. (Par exemple, si *P=A* alors *U=W=A*.)

b) Soit $P(x_0,y_0)$. Il est évident que $U(x_0,0)$ et $V(0,y_0)$.
W est le point d'intersection de *(AB)* et de la droite *d* passant par *P* et perpendiculaire à *(AB)*.
Or $(AB)\equiv y=-2x+2$
Comme $d\perp(AB)$, la pente de *d* vaut $\frac{1}{2}$ et $d\equiv y=\frac{1}{2}x+k$
$P\in d\Leftrightarrow y_0=\frac{1}{2}x_0+k\Leftrightarrow k=y_0-\frac{1}{2}x_0$
Donc $d\equiv y=\frac{1}{2}x+y_0-\frac{1}{2}x_0$
Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases}y=-2x+2 & (1)\\ y=\frac{1}{2}x+y_0-\frac{1}{2}x_0 & (2)\end{cases}$$

(1) dans (2) :

$$\begin{aligned}&-2x+2=\tfrac{1}{2}x+y_0-\tfrac{1}{2}x_0\\ \Leftrightarrow\ &-\tfrac{5}{2}x=-\tfrac{1}{2}x_0+y_0-2\\ \Leftrightarrow\ &x=\tfrac{1}{5}x_0-\tfrac{2}{5}y_0+\tfrac{4}{5}\end{aligned}$$

Dans (1) :

$$\begin{aligned} y &= -2\cdot\left(\tfrac{1}{5}x_0-\tfrac{2}{5}y_0+\tfrac{4}{5}\right)+2 \\ &= -\tfrac{2}{5}x_0+\tfrac{4}{5}y_0+\tfrac{2}{5} \end{aligned}$$

Donc : $W\left(\tfrac{1}{5}x_0-\tfrac{2}{5}y_0+\tfrac{4}{5},-\tfrac{2}{5}x_0+\tfrac{4}{5}y_0+\tfrac{2}{5}\right)$

U, V et W sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{UW}$ sont colinéaires

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow dét\left(\overrightarrow{UV},\overrightarrow{UW}\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -x_0 & -\tfrac{4}{5}x_0-\tfrac{2}{5}y_0+\tfrac{4}{5} \\ y_0 & -\tfrac{2}{5}x_0+\tfrac{4}{5}y_0+\tfrac{2}{5} \end{vmatrix}=0 \\
&\Leftrightarrow -x_0\cdot\left(-\tfrac{2}{5}x_0+\tfrac{4}{5}y_0+\tfrac{2}{5}\right)-y_0\cdot\left(-\tfrac{4}{5}x_0-\tfrac{2}{5}y_0+\tfrac{4}{5}\right)=0 \quad |\cdot 5 \\
&\Leftrightarrow 2x_0^2-4x_0y_0-2x_0+4x_0y_0+2y_0^2-4y_0=0 \quad |\div 2 \\
&\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2-x_0-2y_0=0 \\
&\Leftrightarrow \left(x_0^2-x_0+\tfrac{1}{4}\right)+\left(y_0^2-2y_0+1\right)=\tfrac{5}{4} \\
&\Leftrightarrow \left(x_0-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y_0-1\right)^2=\tfrac{5}{4}
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{L}$ est le cercle de centre $I\left(\tfrac{1}{2},1\right)=\text{mil}[AB]$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$. C'est le cercle circonscrit au triangle ABO.