LE GOUVERNEMENT DU GRAND-DUCHÉ DE LUXEMBOURG Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enfance et de la Jeunesse	EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES 2017	
BRANCHE	**SECTION**	**ÉPREUVE ÉCRITE**
MATHÉMATIQUES I	**B**	*Durée de l'épreuve* *3 heures*
		Date de l'épreuve *15 septembre 2017*
		Numéro du candidat

Question I (1+6+3)+4=14 points

1) Soit le polynôme
$P(z)=z^3-(m+i+2mi)z^2+\left(-2m+mi+2m^2i\right)z+2m^2$, m étant un paramètre réel non nul.

a) Montrer que i est une racine de P.

b) Déterminer les autres racines de P.

c) Soit A le point d'affixe i,
B le point d'affixe l'autre racine imaginaire pure trouvée et
C le point d'affixe la 3e racine trouvée.
Déterminer par calcul le paramètre m pour que le triangle ABC soit rectangle en C.

2) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z-3|=\frac{\sqrt{2}}{2}|z-5|$.
Représenter cet ensemble dans le plan de Gauss.
(Remarque : on note $|Z|$ le module du nombre complexe Z.)

Question II 5+(3+2+2+5)=17 points

1) Soit P une parabole de foyer F et de directrice d.
Soit M un point de la parabole et H le projeté orthogonal *(voir (*) page 2)* de M sur la directrice d.
Démontrer que la tangente à la parabole en M est la médiatrice du segment *[FH]*.

2) On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé $R=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) Déterminer une équation réduite de l'hyperbole $\mathbb{H}$ de foyers $F(5;1)$ et $F'(-1;1)$ et dont un sommet est le point $S(3;1)$.

b) Déterminer l'excentricité, des équations des directrices et des équations des asymptotes obliques dans le repère R.

c) Représenter l'hyperbole $\mathbb{H}$ dans le repère R.

d) Déterminer des équations des tangentes à $\mathbb{H}$ perpendiculaires à la droite $\boldsymbol{\delta} \equiv y=\frac{1}{4}x$ dans le repère R.

<u>Question III</u> (2+5)+(3+1)+(2+4)=17 points

1) Un professeur de mathématiques veut entraîner ses élèves à l'Olympiade Mathématique et rédige un questionnaire comportant 6 questions à choix multiple : pour chaque question il propose 5 réponses (A, B, C, D ou E), une seule d'entre elles est exacte. Un élève doit répondre à toutes les questions.
   a) On suppose qu'un élève répond au hasard aux 6 questions.
      1°) Calculer la probabilité que l'élève n'ait aucune réponse exacte.
      2°) Calculer la probabilité que l'élève ait exactement deux réponses exactes.
      3°) Calculer la probabilité que l'élève réponde correctement aux questions n° 1, 2 et 3 et donne de fausses réponses aux autres questions.
   b) Le professeur distribue ce questionnaire à ses 25 élèves qui, malheureusement, répondent tous au hasard aux questions. On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves qui n'ont fourni aucune réponse exacte.
      1°) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres.
      2°) Calculer la probabilité qu'au plus un élève n'ait donné que des réponses fausses.
      3°) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire.

2) On considère le jeu suivant :
   Un joueur lance un dé non truqué. S'il obtient 1, 2 ou 3, il gagne l'équivalent en euros (c.-à-d. 1€ s'il obtient 1 p.ex.). Sinon il relance le dé. S'il obtient alors 1, 2 ou 3, il gagne 3€ sinon il perd 5€.
   a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui désigne le gain du joueur.
   b) Est-ce que le jeu est favorable au joueur ?

3) Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 3 cartes.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 2 cartes de même valeur ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un valet ou exactement 2 trèfles ?

<u>Question IV</u> 12 points

Dans un repère orthonormé $R=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne deux points fixes $A(1,0)$ et $B(0,2)$. Pour un point quelconque $P\left(x_0,y_0\right)$, on note U, V et W les projetés orthogonaux *(voir (*) en bas de page)* de P sur les droites *(OA), (OB)* et *(AB)* respectivement. Soit $\mathbb{L}$ le lieu des points P du plan tels que les points U, V et W sont alignés.

a) Sans calculs, montrer que O, A et B appartiennent à $\mathbb{L}$.

b) Déterminer une équation cartésienne de $\mathbb{L}$ dans le repère R, puis dessiner-le.

(*) Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite d est le pied de la perpendiculaire à d passant par M.