Examen de fin d'études secondaires 2017

Section B - Mathématiques 1 - Corrigé

Question 1 $\boxed{A}$ 1) $P(z)=0 \iff \underline{z=7i}$ ou $\underbrace{z^3 - iz^2 + (15-24i)z + (72+9i)}_{=Q(z)} = 0$

Soit $b \in \mathbb{R}$. $Q(bi)=0 \iff -b^3 i + i b^2 + (15-24i)bi + 72 + 9i = 0$

$$\iff \begin{cases} -b^3 + b^2 + 15b + 9 = 0 & (1) \\ 24b + 72 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \iff b = -\frac{72}{24} = -3 \quad \rightarrow (1) : 27 + 9 - 45 + 9 = 0$ ✓

Ainsi $Q(-3i)=0$ et $Q(z)$ est divisible par $z+3i$

	1	$-i$	$15-24i$	$72+9i$
$-3i$		$-3i$	-12	$-9i-72$
	1	$-4i$	$3-24i$	0

Donc $Q(z)=0 \iff \underline{z=-3i}$ ou $z^2 - 4iz + 3 - 24i = 0$ (*)

$\Delta = -16 - 4(3-24i) = -28 + 96i$

$$(a+bi)^2 = \Delta \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -28 & (1) \\ 2ab = 96 & (2) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{28^2+96^2} = 100 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(3)$: $2a^2 = 72 \iff a = \pm 6$

$(3)-(1)$: $2b^2 = 128 \iff b = \pm 8$

Par (2) : $\underline{RCC(\Delta) = \{6+8i \,;\, -6-8i\}}$

(*) $\iff z = \frac{4i+6+8i}{2} = \underline{3+6i}$

ou

$z = \frac{4i-6-8i}{2} = \underline{-3-2i}$

$\underline{S = \{7i \,; -3i \,; 3+6i \,; -3-2i\}}$

2) $A(-3i)$, $B(-3-2i)$, $C(3+6i)$, $D(7i)$

- $ABDC$ est un # $\iff \vec{AB} = \vec{CD}$

  $\iff z_B - z_A = z_D - z_C$

  $\iff -3+i = i-3$ ✓

- $AB = |z_B - z_A| = |-3+i| = \sqrt{10}$

  $BD = |z_D - z_B| = |9i+3| = \sqrt{90}$

  $AD = |z_D - z_A| = |10i| = 10$

  Comme $AD^2 = AB^2 + BD^2$, ABD est rectangle en B par la réciproque du thm de Pythagore.

- $\underline{\text{Ainsi } ABDC \text{ est un rectangle}}$

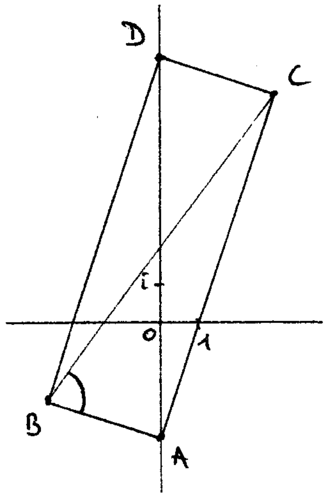
3) $\widehat{ABC} = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right)$

$= \arg\left(\frac{6+8i}{3-i}\right)$

$= \arg(1+3i)$

$= \arctan\left(\frac{3}{1}\right)$ car $\Re(1+3i) > 0$

$\simeq 71{,}57°$



Question 1 (suite)

$\boxed{B}$ 1) $z^4 + 16 = 0$

$\Leftrightarrow z^4 = -16$

$\Leftrightarrow z^4 = 16 \operatorname{cis} \pi$

$z_k = \sqrt[4]{16} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{cases} z_0 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ z_3 = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{4} = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{cases}$$

2) $z^4 + 16$

$= (z - \sqrt{2} - i\sqrt{2})(z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}) \cdot (z + \sqrt{2} - i\sqrt{2})(z + \sqrt{2} + i\sqrt{2})$

$= \left[(z - \sqrt{2})^2 + 2\right] \cdot \left[(z + \sqrt{2})^2 + 2\right]$

$= \underline{(z^2 - 2\sqrt{2}\, z + 4) \cdot (z^2 + 2\sqrt{2}\, z + 4)}$

Question 2

$\boxed{A}$ 1) $\#\Omega = C_9^3 = 84$ cas équiprobables

x_i	$f(x_i) = P(X = x_i)$	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
4	$\frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{16}{21}$
2	$\frac{C_4^2 \cdot C_5^1}{C_9^3} = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{10}{7}$
1	$\frac{C_4^1 \cdot C_5^2}{C_9^3} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$
-2	$\frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$	$\frac{-5}{21}$	$\frac{10}{21}$
Σ	$\sum f(x_i) = 1$ ✓	$\frac{24}{21} = \frac{8}{7}$	$\frac{66}{21} = \frac{22}{7}$

$E(X) = \sum x_i f(x_i) = \underline{\frac{8}{7}\text{ €} \simeq 1{,}14\text{ €}}$

Par le thm de König, on a :

$V(X) = \sum x_i^2 f(x_i) - E^2(X)$

$= \frac{22}{7} - \left(\frac{8}{7}\right)^2$

$= \frac{90}{49}\ \text{€}^2$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \underline{\frac{3\sqrt{10}}{7}\text{ €} \simeq 1{,}36\text{ €}}$

2) a) • Épreuve de Bern : il joue une partie

succès : il gagne 4 € : $p = \frac{1}{21}$

échec : il ne gagne pas 4 € : $q = \frac{20}{21}$

• Schéma de Bern. : n parties indépendantes car tirages avec remise

• Comme Y est égal au nombre de succès, Y suit une loi binomiale :

$P(Y = i) = C_n^i \cdot \left(\frac{1}{21}\right)^i \cdot \left(\frac{20}{21}\right)^{n-i}$

$\forall i \in \{0; 1; \dots; n\}$

b) $P(Y \geq 1) > 0{,}6$

$\Leftrightarrow 1 - P(Y = 0) > 0{,}6$

$\Leftrightarrow \left(\frac{20}{21}\right)^n < 0{,}4 \quad \Big|\log_{\frac{20}{21}}$ bij stat

$\Leftrightarrow n > \log_{\frac{20}{21}}(0{,}4) \simeq 18{,}8$

Il doit jouer au moins 19 parties.

$\boxed{B}$ 1) 3 parfums : $C_{10}^3 = 120$

2 parfums : $A_{10}^2 = 90$

1 parfum : $C_{10}^1 = 10$

Il y a 220 bols avec 3 boules

2) $p = \frac{C_6^3 \cdot C_4^1 + C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{95}{210} = \frac{19}{42}$

3) Comme la permutation des 2 bacs de vanille laisse le rangement inchangé, il y a :

$\frac{A_{15}^{11}}{P_2} = \frac{15!}{4!\,2!}$ $(\simeq 2{,}72 \cdot 10^{10})$

rangements différents.

Question 3

1)b) $\Gamma \equiv 4x^2 - 5y^2 = 16$

$d \equiv y = -\frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$

$t \perp d \Leftrightarrow k_t = -\frac{1}{k_d} = \frac{6}{5}$

Donc $t \equiv y = \frac{6}{5}x + \lambda$

$\boxed{t \cap \Gamma}$ $\begin{cases} y = \frac{6}{5}x + \lambda & (1) \\ 4x^2 - 5y^2 = 16 & (2) \end{cases}$

$(1) \to (2)$: $4x^2 - 5\left(\frac{6}{5}x + \lambda\right)^2 = 16$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 5\cdot\left(\frac{36}{25}x^2 + \frac{12}{5}\lambda x + \lambda^2\right) = 16$

$\Leftrightarrow + \frac{16}{5}x^2 + 12\lambda x + 5\lambda^2 + 16 = 0 \quad (*)$

Solution unique $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$\Leftrightarrow 144\lambda^2 - \frac{64}{5}(5\lambda^2 + 16) = 0$

$\Leftrightarrow 80\lambda^2 - \frac{1024}{5} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{1024}{400} = \frac{64}{25}$

$\Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{8}{5}$

- $\underline{t_1 \equiv y = \frac{6}{5}x + \frac{8}{5}}$ (3)

Point de contact :

$\lambda = \frac{8}{5}$ et $\Delta = 0$

$(*) \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} = \frac{-12\cdot\frac{8}{5}}{\frac{32}{5}} = -3$

$\to (3)$: $y = -2$

t_1 touche Γ en $\underline{A(-3\,;-2)}$

- $\underline{t_2 \equiv y = \frac{6}{5}x - \frac{8}{5}}$ (4)

Point de contact :

$\lambda = -\frac{8}{5}$ et $\Delta = 0$

$(*) \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a} = +3$

$\to (4)$: $y = 2$

t_2 touche Γ en $\underline{B(3\,;2)}$

2) $A(1;-3)$, $B(1;1)$, $MA + MB = 5$

Vu la forme de l'équation, Γ est une <u>ellipse</u> de <u>foyers</u> A et B.

Centre : mil $[AB] = \underline{\Omega(1\,;-1)}$

Axe focal : $\underline{(AB) \equiv x = 1}$ $(/\!/ (Oy))$

Ainsi $\left.\begin{array}{l} 2b = 5 \Leftrightarrow b = \frac{5}{2} \\ 2c = AB = 4 \Leftrightarrow c = 2 \end{array}\right\}$ $a^2 = b^2 - c^2 \to a = \frac{3}{2}$

Sommets : $\underline{S_1\left(1\,;\frac{3}{2}\right) \text{ et } S_2\left(1\,;-\frac{7}{2}\right)}$

$\underline{T_1\left(\frac{5}{2}\,;-1\right) \text{ et } T_2\left(-\frac{1}{2}\,;-1\right)}$

Excentricité : $\underline{e = \frac{c}{b} = \frac{4}{5}}$

Équation réduite :

$$\underline{\frac{(x-1)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{25}{4}} = 1}$$

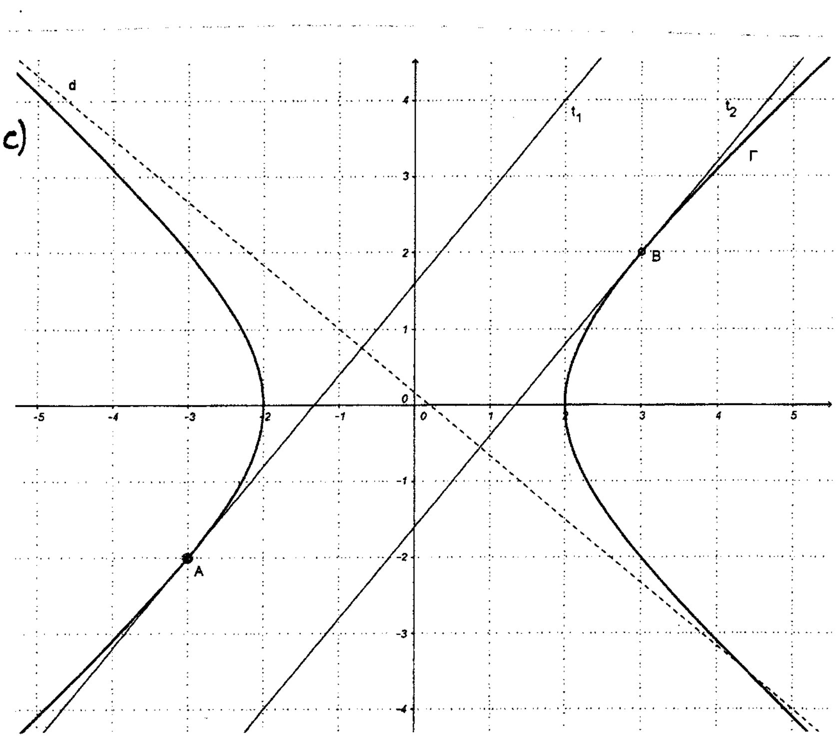
1) a) $\Gamma \equiv \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{16}{5}} = 1$; $a = 2$; $b = \frac{4\sqrt{5}}{5}$; $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{36}{5}$ $\to c = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

Hyperbole de centre O et d'axe focal (Ox).

Sommets : $(-2;0)$, $(2;0)$; Foyers $\left(-\frac{6\sqrt{5}}{5};0\right)$; $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5};0\right)$

Asymptotes : $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$

c)



Question 4

$\boxed{A}$ 1) Si $\Pi(t) = (\cos(2t) - 2\,;\, 2\sin t)$

alors $\Pi(-t) = (\cos(2t) - 2\,;\, -2\sin t)$

$= s_{(Ox)}(\Pi(t))$

Ainsi C est symétrique par rapport à (Ox) et il suffit de l'étudier sur $[0;\pi]$.

2) $\cdot$ $y = 2\sin t \iff \sin t = \frac{y}{2}$

$\cdot$ $x = \cos(2t) - 2$

$\iff x = \cos^2 t - \sin^2 t - 2$

$\iff x = 1 - 2\sin^2 t - 2$

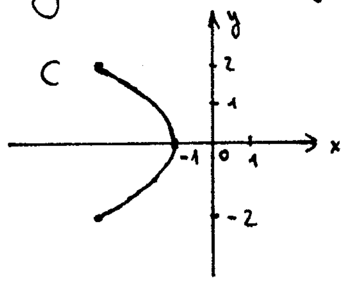
$\iff x = -1 - 2\left(\frac{y}{2}\right)^2$

$\iff x + 1 = -\frac{1}{2} y^2$

$\iff \underline{y^2 = -2(x+1)}$

Si $t \in [-\pi;\pi]$, alors $y = 2\sin t$ parcourt $[-2;2]$. Ainsi C est la partie de la parabole d'éq. $y^2 = -2(x+1)$ contenue dans la région où $-2 \le y \le 2$.

3)

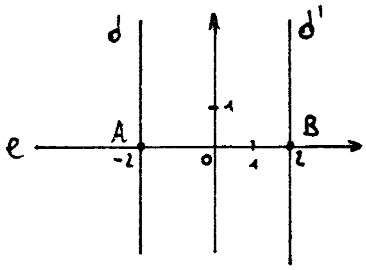


$\boxed{B}$ 1) Choix du repère

R.O.N. avec $e = (Ox)$ tel que

$d \equiv x = -2$ et $d' \equiv x = 2$.

Alors on a $A(-2;0)$ et $B(2;0)$



On a : $\Pi(x;y) \in L_k$

$\iff \text{dist}^2(\Pi;d) + \text{dist}^2(\Pi;d') + \text{dist}^2(\Pi;e) = k$

$\iff (x+2)^2 + (x-2)^2 + y^2 = k$

$\iff x^2 + 4x + 4 + x^2 - 4x + 4 + y^2 = k$

$\iff \underline{2x^2 + y^2 = k - 8}$ $\circledast$

1er cas : $k - 8 < 0 \iff k < 8$

Alors $\circledast$ est impossible et $\underline{L_k = \emptyset}$

2^e cas : $k - 8 = 0 \iff k = 8$

Alors $\circledast \iff x = y = 0$ et $\underline{L_8 = \{(0;0)\}}$

3^e cas : $k - 8 > 0 \iff k > 8$

$\circledast \iff \underline{\dfrac{x^2}{\frac{k-8}{2}} + \dfrac{y^2}{k-8} = 1} \equiv L_k$

Si $k > 8$, L_k est l'ellipse de centre O avec $a = \sqrt{\frac{k-8}{2}}$ et $b = \sqrt{k-8}$.

L'axe focal est (Oy), car $b > a$.

2) $A(-2;0) \in L_k \iff 8 + 0 = k - 8 \iff k = 16$

Vérification : $B(2;0) \in L_{16} \iff 8 + 0 = 16 - 8$ ✓

Le lieu cherché est $L_{16} \equiv \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$

où $a = 2$ et $b = 2\sqrt{2}$.