CORRECTION

Exercice 1 : (14 points)

$$z^3+(-6-3i)z^2+(9+12i)z-9(2+3i)=0.$$

Soit ai avec $a\in\mathbb{R}$ la solution imaginaire pure.

On a : $-a^3i+(6+3i)a^2+(9i-12)a-18-27i=0$

3 $\Leftrightarrow\begin{cases}6a^2-12a-18=0 & (1)\\ -a^3+3a^2+9a-27=0 & (2)\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow a^2-2a-3=0\Leftrightarrow a=3$ ou $a=-1$

$a=3$ est solution de (2) et $a=-1$ ne l'est pas.

Ainsi : $3i$ est solution de l'équation

Par un schéma de Horner, on obtient :

2 $z^3+(-6-3i)z^2+(9+12i)z-9(2+3i)=(z-3i)\left[z^2-6z+9-6i\right]$

Il s'agit encore de résoudre $z^2-6z+9-6i=0$ (E)

2 $\Delta=36-36+24i=24i$

Soit $\delta=\alpha+\beta i\ (\alpha,\beta\in IR)$ une racine carrée de Δ

4 On a : $\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=0 & (1)\\ \alpha^2+\beta^2=24 & (2)\\ \alpha\beta>0 & (3)\end{cases}$

$(1)+(2)$: $2\alpha^2=24$ $\Leftrightarrow\alpha^2=12$ $\Leftrightarrow\alpha=\pm2\sqrt{3}$

$(2)-(1)$: $2\beta^2=24$ $\Leftrightarrow\beta^2=12$ $\Leftrightarrow\beta=\pm2\sqrt{3}$

Comme $\alpha\beta>0:\delta=2\sqrt{3}\left(1+i\right)$ ou $\delta=2\sqrt{3}\left(-1-i\right)$

Ainsi les solutions de (E) sont :

3 $z_1=\dfrac{6+2\sqrt{3}\left(1+i\right)}{2}=3+\sqrt{3}\left(1+i\right)=\left(3+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}i$ et $z_2=\dfrac{6+2\sqrt{3}\left(-1-i\right)}{2}=\left(3-\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}i$

Donc : $S=\left\{3i;\left(3+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}i;\left(3-\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}i\right\}$

Exercice 2 :   (12 + 4 = 16 points)

1. a. formes trigonométriques :

3 $z_1=\left(2\sqrt{3}i+2\right)^3\cdot\left(1+i\right)^5=\left[4cis\left(\frac{\Pi}{3}\right)\right]^3\cdot\left[\sqrt{2}cis\left(\frac{\Pi}{4}\right)\right]^5$

$=64\cdot4\sqrt{2}cis\left(\Pi+\frac{5\Pi}{4}\right)=256\sqrt{2}\,cis\left(\frac{9\Pi}{4}\right)=\underline{256\sqrt{2}\,cis\left(\frac{\Pi}{4}\right)}$

3 $z_2=\left(-1+\sqrt{3}i\right)^4\cdot\left(4\sqrt{3}+4i\right)=\left[2cis\frac{2\Pi}{3}\right]^4\cdot\left[8cis\left(\frac{\Pi}{6}\right)\right]=128cis\left(\frac{8\Pi}{3}+\frac{\Pi}{6}\right)=128cis\left(\frac{17\Pi}{6}\right)=\underline{128cis\left(\frac{5\Pi}{6}\right)}$

2 $Z=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{256\sqrt{2}\;cis\left(\frac{\Pi}{4}\right)}{128\;cis\left(\frac{5\Pi}{6}\right)}=2\sqrt{2}\;cis\left(\frac{\Pi}{4}-\frac{5\Pi}{6}\right)=\underline{2\sqrt{2}\;cis\left(\frac{-7\Pi}{12}\right)}$

b. formes algébriques :

1 $z_1=256\sqrt{2}\,cis\left(\frac{\Pi}{4}\right)=256\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\underline{256+256i}$

1 $z_2=128cis\left(\frac{5\Pi}{6}\right)=128\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\underline{-64\sqrt{3}+64i}$

2 $Z=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{256\left(1+i\right)}{64\left(-\sqrt{3}+i\right)}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)}=\dfrac{4\left(\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i-1\right)}{-4}=\underline{\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(-1-\sqrt{3}\right)i}$

2. On a donc :

$$2\sqrt{2}cis\left(\frac{-7\Pi}{12}\right)=\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(-1-\sqrt{3}\right)i$$

$$\Leftrightarrow cis\left(\frac{-7\Pi}{12}\right)=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}}+\frac{\left(-1-\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}}i$$

4 $\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{-7\Pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\left(\frac{-7\Pi}{12}\right)=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{cases}$

Ainsi : $\cos\left(\frac{7\Pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{-7\Pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{7\Pi}{12}\right)=-\sin\left(\frac{-7\Pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Exercice 3 : (15 points)

Méthode de Cramer :

2 $$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{vmatrix}=1+m^3+m^3-m^2-m^2-m^2=2m^3-3m^2+1=(m-1)^2(2m+1) \qquad \text{racines: } 1;-\tfrac{1}{2}$$

2 $$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m^2 & m & 1 \end{vmatrix}=1+m^4+m^3-m^3-m^2-m^2=m^4-2m^2+1=(m-1)^2(m+1)^2 \qquad \text{racines: } 1;-1$$

2 $$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m & m \\ m & m^2 & 1 \end{vmatrix}=m+m^2+m^4-m^3-m-m^3=m^4-2m^3+m^2=m^2(m-1)^2 \qquad \text{racines: } 0;1$$

2 $$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \\ m & m & m^2 \end{vmatrix}=m^2+m^3+m^2-m-m^4-m^2=-m^4+m^3+m^2-m=-m(m-1)^2(m+1) \quad \text{racines: } 0;1;-1$$

a. Si $m\in\mathbb{R}-\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$: $\Delta\neq 0$ et système admet une **solution unique.**

2 $S_m=\left\{\left(\frac{(m+1)^2}{2m+1};\frac{m^2}{2m+1};\frac{-m(m+1)}{2m+1}\right)\right\}$

Interprétation : Le système est formé de 3 plans sécants en un point.

2 b. Si $m=\frac{-1}{2}$: $\Delta=0$ et $\Delta_x\neq 0$ Le système est impossible : $S_{\frac{1}{2}}=\varnothing$

Interprétation : Le système est formé de 3 plans dont l'intersection est vide.

c. Si $m=1$: $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ Le système est **impossible ou indéterminé.**

On obtient : $x+y+z=1\Leftrightarrow z=1-x-y$

3 $S_1=\left\{\left(x;y;1-x-y\right) \text{ avec } x,y\in\mathbb{R}\right\}$

Interprétation : Le système est formé du plan Π passant par A(0 ;0 ;1) et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1;0;-1)$ et $\vec{v}(0;1;-1)$.

__Exercice 4 :   (4 + 6 + 5 = 15 points)__

1. $\overrightarrow{AB}\left(2;-6;0\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(-1;-5;-2\right)$ ne sont pas colinéaires, donc *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés.

Ainsi : $M(x,y,z)\in\Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

4

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-3 \\ -6 & 5 & y-5 \\ 0 & 2 & z-6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 10z-60-12x+36-4y+20+6z-36=0$$

$$\Leftrightarrow -12x-4y+16z-40=0 \Leftrightarrow 3x+y-4z+10=0\,(\Pi)$$

2. Le vecteur $\vec{n}\left(3;1;-4\right)$ est normal à Π.

Ainsi *d* est la droite passant par *D* et de vecteur directeur $\vec{n}$.

2 Donc : $(d):\begin{cases} x=4+3\alpha \\ y=4+\alpha \quad (\alpha\in IR) \\ z=\quad -4\alpha \end{cases}$

Pour déterminer le point d'intersection de *d* et Π, on résout :

4

$$\begin{cases} 3x+y-4z+10=0 \\ x=4+3\alpha \\ y=4+\alpha \\ z=-4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(4+3\alpha)+4+\alpha-4(-4\alpha)+10=0 \\ x=4+3\alpha \\ y=4+\alpha \\ z=-4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26\alpha=-26 \\ x=4+3\alpha \\ y=4+\alpha \\ z=-4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ x=1 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$$

Ainsi $P(1;3;4)$

1 3. $E\in d \Leftrightarrow \begin{cases} 4=4+3\alpha \\ 2=4+\alpha \\ 6=-4\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \alpha=-2 \\ \alpha=-\frac{3}{2} \end{cases}$ impossible, donc $E\notin d$; ainsi $\overrightarrow{ED}$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}$.

Γ est donc le plan passant par *E* et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{ED}$ et $\vec{n}$.

4

$$M(x,y,z)\in\Gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{ED},\vec{n} \text{ et } \overrightarrow{EM} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 3 & x-4 \\ 2 & 1 & y-2 \\ -6 & -4 & z-6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -18y+36-8x+32+6x-24-6z+36=0 \Leftrightarrow -2x-18y-6z+80=0$$

$$\Leftrightarrow x+9y+3z-40=0 \;\; (\Gamma)$$