Examen de fin d'études secondaires 2011 - Section D - Mathématiques I
Corrigé

I. 1) $z_1=-1+i$; $|z_1|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\begin{cases}\cos\varphi_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$, donc: $\varphi_1=\dfrac{3\pi}{4}$

D'où: $z_1=\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{4}$

$z_2=\sqrt{3}+i$; $|z_2|=\sqrt{3+1}=2$

$\begin{cases}\cos\varphi_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi_1=\dfrac{1}{2}\end{cases}$, donc: $\varphi_1=\dfrac{\pi}{6}$

D'où: $z_1=2\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6}$

2) $Z=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{-1+i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{(-1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\dfrac{-\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}+1}{3+1}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}i$

D'autre part: $Z=\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{3\pi}{4}}{2\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\dfrac{7\pi}{12}$

3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}i \;\;|\cdot\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \operatorname{cis}\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i$

Donc: $\cos\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

4) $Z^6=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^6\operatorname{cis}\dfrac{42\pi}{12}=\dfrac{1}{8}\operatorname{cis}\dfrac{7\pi}{2}=\dfrac{1}{8}\operatorname{cis}\left(4\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{8}\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}i$

5) Racines cubiques de z_2 : $t_k=\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{2k\pi}{3}\right)$, avec $k\in\{0;1;2\}$

Donc: $t_0=\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{18}$, $t_1=\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\dfrac{13\pi}{18}$ et $t_2=\sqrt[3]{2}\operatorname{cis}\dfrac{25\pi}{18}$

II. $\underbrace{z^3-(3-2i)z^2+13z-27+6i}_{P(z)}=0$

Soit $z_0=bi$ ($b\in\mathbf{R}$) une solution imaginaire pure.

Alors: $P(z_0)=0 \Leftrightarrow -b^3i+3b^2-2b^2i+13bi-27+6i=0$

$\Leftrightarrow 3b^2-27+\left(-b^3-2b^2+13b+6\right)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b^2-27=0 \quad (1) \\ -b^3-2b^2+13b+6=0 \quad (2) \end{cases}$

(1): $b^2=9 \Leftrightarrow b=3$ ou $b=-3$

$b=3$ dans (2): $-27-18+39-6=0$

Donc: $z_0=3i$ est une solution imaginaire pure et $P(z)$ est divisible par $z-3i$.

Schéma de Horner:

	1	$-3+2i$	13	$-27+6i$
$3i$		$3i$	$-15-9i$	$27-6i$
	1	$-3+5i$	$-2-9i$	0

D'où: $P(z)=(z-3i)\cdot Q(z)$, avec $Q(z)=z^2+(-3+5i)z-2-9i$.

Résolvons l'équation $Q(z)=0$:

$\Delta=(-3+5i)^2-4(-2-9i)=9-30i-25+8+36i=-8+6i$

Soit $x+iy$ ($x, y\in\mathbf{R}$) une racine carrée complexe de Δ. On obtient le système suivant:

$\begin{cases} x^2-y^2=-8 \quad (1) \\ 2xy=6 \quad (2) \\ x^2+y^2=\sqrt{64+36}=10 \quad (3) \end{cases}$

$(1)+(3)$: $2x^2=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

$(3)-(1)$: $2y^2=18 \Leftrightarrow y^2=9 \Leftrightarrow y=3$ ou $y=-3$

D'après (2) x et y sont de même signe.

Donc: Les racines carrées de Δ sont $1+3i$ et $-1-3i$.

Ainsi: Les solutions de l'équation $Q(z)=0$ sont $z_1=\dfrac{3-5i+1+3i}{2}=\dfrac{4-2i}{2}=2-i$ et

$z_2=\dfrac{3-5i-1-3i}{2}=\dfrac{2-8i}{2}=1-4i$.

Finalement: $S=\{3i\,;2-i\,;1-4i\}$

III. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = 1+1-m^2+1-m-m = -m^2-2m+3$

Or: $-m^2-2m+3=0\,;\,\Delta = 4+12=16\,;\, m_1 = \dfrac{2+4}{-2} = -3\,;\, m_2 = \dfrac{2-4}{-2} = 1$

Donc: $\det A = -(m+3)(m-1)$ et $\det A = 0 \Leftrightarrow m=-3$ ou $m=1$

<u>1er cas:</u> $m \neq -3$ et $m \neq 1$:

Comme $\det A \neq 0$, on a un système de Cramer.

$\det A_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m & -1 & 1 \\ m & m & -1 \end{vmatrix} = m+m^2+m+m = m^2+3m = m(m+3)$

$x = \dfrac{\det A_x}{\det A} = \dfrac{m(m+3)}{-(m+3)(m-1)} = -\dfrac{m}{m-1}$

$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -m & m & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = -m-m^2-m-m = -m^2-3m = -m(m+3)$

$y = \dfrac{\det A_y}{\det A} = \dfrac{-m(m+3)}{-(m+3)(m-1)} = \dfrac{m}{m-1}$

$\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -m & -1 & m \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = -m+m-m^2+m^2 = 0$

$z = \dfrac{\det A_z}{\det A} = \dfrac{0}{-(m+3)(m-1)} = 0$

Le système admet une solution unique: $S = \left\{\left(-\dfrac{m}{m-1}\,;\dfrac{m}{m-1}\,;0\right)\right\}$

Interprétation géométrique:

Les trois plans se coupent en un seul point.

<u>2^{e} cas:</u> $m=-3$:

Le système s'écrit: $\begin{cases} x+y+z=0 \quad (1) \\ 3x-y+z=-3 \quad (2) \\ x-3y-z=-3 \quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \quad (1) \\ 4x-4y=-6 \quad (2)/(2)+(3) \\ 4x+2z=-3 \quad (3)/(1)+(2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=-\dfrac{3}{2} \\ 2x+z=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

En posant $x=\alpha$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$, on obtient: $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha+\dfrac{3}{2} \\ z=-2\alpha-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Le système est simplement indéterminé: $S = \left\{\left(\alpha\,;\alpha+\dfrac{3}{2}\,;-2\alpha-\dfrac{3}{2}\right) \,|\, \alpha \in \mathbf{R}\right\}$

Interprétation géométrique:

Les trois plans ont comme intersection la droite passant par le point $A\left(0;\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

<u>3ᵉ cas:</u> $m=1$:

Le système s'écrit: $\begin{cases}x+y+z=0\\-x-y+z=1\\x+y-z=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y+z=0\\-x-y+z=1\\-x-y+z=-1\end{cases}$

Le système est impossible: $S=\varnothing$

Interprétation géométrique:

Les trois plans n'ont aucun point commun.

IV. 1) Soient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\-1\end{pmatrix}$ deux vecteurs directeurs (non colinéaires) du plan π.

Alors: $M(x;y;z)\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}+h\overrightarrow{AC}\quad (k,h\in\mathbf{R})$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x-1=k-2h\\y+3=4k+5h\\z-2=-3k-h\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1+k-2h\\y=-3+4k+5h\\z=2-3k-h\end{cases}$

D'autre part: $M(x;y;z)\in\pi \Leftrightarrow \text{dét}\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-1 & 1 & -2\\y+3 & 4 & 5\\z-2 & -3 & -1\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow -4(x-1)+5(z-2)+6(y+3)+8(z-2)+15(x-1)+(y+3)=0$

$\Leftrightarrow 11(x-1)+7(y+3)+13(z-2)=0$

$\Leftrightarrow 11x-11+7y+21+13z-26=0$

$\Leftrightarrow 11x+7y+13z-16=0$

2) Une équation cartésienne du plan π' est $11x+7y+13z+d=0$.

Or: $D(5;-2;-1)\in\pi \Leftrightarrow 55-14-13+d=0 \Leftrightarrow d=-28$

Donc: $\pi' \equiv 11x+7y+13z-28=0$

3) Comme $d\perp\pi$, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}11\\7\\13\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan π et aussi un vecteur directeur de la droite d.

Ainsi: $d\equiv\begin{cases}x=1+11k\\y=-3+7k\\z=2+13k\end{cases}\quad (k\in\mathbf{R})$
