Corrigé - Mathématiques I - Section D

Exercice 1

1. On a : $z_0^2 = (2-\mathrm{i})^2 = 4 - 4\mathrm{i} - 1 = 3 - 4\mathrm{i}$ et $z_0^3 = (3-4\mathrm{i})\cdot(2-\mathrm{i}) = 6 - 3\mathrm{i} - 8\mathrm{i} - 4 = 2 - 11\mathrm{i}$.

$$(z_0 \text{ est racine de } P) \Leftrightarrow P(z_0) = 0$$

Calculons :

$$\begin{aligned}
P(z_0) &= 2 - 11\mathrm{i} - (7+2\mathrm{i})(3-4\mathrm{i}) + (17+8\mathrm{i})(2-\mathrm{i}) - 15 - 10\mathrm{i}\\
&= 2 - 11\mathrm{i} - (21 - 28\mathrm{i} + 6\mathrm{i} + 8) + (34 - 17\mathrm{i} + 16\mathrm{i} + 8) - 15 - 10\mathrm{i}\\
&= 2 - 11\mathrm{i} - 21 + 28\mathrm{i} - 6\mathrm{i} - 8 + 34 - 17\mathrm{i} + 16\mathrm{i} + 8 - 15 - 10\mathrm{i}\\
&= 2 - 21 - 8 + 34 + 8 - 15 + (-11 + 28 - 6 - 17 + 16 - 10)\mathrm{i}\\
&= 0 + 0\mathrm{i}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $z_0 = 2 - \mathrm{i}$ est une racine de P et $P(z)$ est divisible par $z - (2-\mathrm{i})$. **3 pts**

2. Schéma de Horner :

	1	$-7-2\mathrm{i}$	$17+8\mathrm{i}$	$-15-10\mathrm{i}$
$2-\mathrm{i}$		$2-\mathrm{i}$	$-13-\mathrm{i}$	$15+10\mathrm{i}$
	1	$-5-3\mathrm{i}$	$4+7\mathrm{i}$	0

Donc : $P(z) = (z - (2-\mathrm{i}))\cdot\underbrace{(z^2 + (-5-3\mathrm{i})z + 4 + 7\mathrm{i})}_{Q(z)}$ **3 pts**

Factorisons $Q(z)$:

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-5-3\mathrm{i})^2 - 4\cdot 1\cdot(4+7\mathrm{i})\\
&= 25 + 30\mathrm{i} - 9 - 16 - 28\mathrm{i}\\
&= 2\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Si $\delta = x + y\mathrm{i}$ est une racine carrée complexe de Δ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases}
x^2 - y^2 = 0 & (1)\\
2xy = 2 & (2)\\
x^2 + y^2 = \sqrt{0^2+2^2} = 2 & (3)
\end{cases}$$

$(1)+(3) : 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

$(3)-(1) : 2y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ ou $y = -1$

D'après (2), x et y ont même signe. Les racines carrées complexes de Δ sont donc $1+i$ et $-1-i$.
Prenons par exemple : $\delta = 1 + i$. **4 pts**

Les racines de Q sont :
$z_1 = \dfrac{5+3i+(1+i)}{2} = \dfrac{6+4i}{2} = 3+2i$ et $z_2 = \dfrac{5+3i-(1+i)}{2} = \dfrac{4+2i}{2} = 2+i$
Finalement :

$$P(z) = (z-(2-i))\cdot(z-(3+2i))\cdot(z-(2+i))$$

et

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2-i \text{ ou } z = 3+2i \text{ ou } z = 2+i$$

2 pts

$$\mathcal{S} = \{2-i; 3+2i; 2+i\}$$

Exercice 2

1. • $|z_1| = \sqrt{18+6} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
$\begin{cases} \cos\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{6}$
On a donc : $z_1 = 2\sqrt{6}\ \text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 2 pts
• $z_2 = 8i\ \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$
$= 8\ \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\ \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 8\ \text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 8\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right) = -4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$ 2 pts

2. $z_1^2 = \left[2\sqrt{6}\ \text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^2 = 24\ \text{cis}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = 24\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 12 - 12\sqrt{3}i$ 2 pts
D'une part :

$$Z = \frac{z_1^2}{z_2} = \frac{24\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{8\ \text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = 3\ \text{cis}\left(-\frac{13\pi}{12}\right) = 3\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + 3\sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)i$$

1 pts

D'autre part :

$$Z = \frac{z_1^2}{z_2} = \frac{12-12\sqrt{3}i}{-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i} = \frac{-48\sqrt{6}-48\sqrt{2}+48\sqrt{6}i-48\sqrt{2}i}{64}$$

$$= 3\frac{(-\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} + 3\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}i$$

2 pts

3. On en déduit :

$$\begin{cases} \cos\left(-\dfrac{13\pi}{12}\right) &= \dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(-\dfrac{13\pi}{12}\right) &= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

2 pts

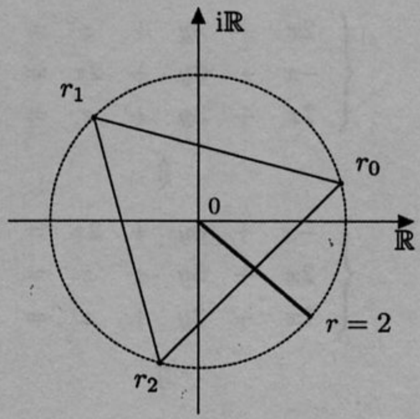
4. • $|w| = \sqrt{32+32} = \sqrt{64} = 8$
$\begin{cases} \cos\theta &= \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

On a donc : $w = 8 \text{ cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Les racines cubiques de w sont : $r_k = 2 \text{ cis}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)$ avec $k \in \{0; 1; 2\}$.

Donc : $r_0 = 2 \text{ cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $r_1 = 2 \text{ cis}\left(\frac{9\pi}{12}\right)$ et $r_2 = 2 \text{ cis}\left(\frac{17\pi}{12}\right)$. **4 pts**

5.



3 pts

Exercice 3

La matrice A du système admet le déterminant :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = 2m^2 - 14m + 12$$

On calcule son discriminant $\Delta = 100$ et on trouve ses racines : $m = 6$ ou $m = 1$. Donc :

$$\det A = 2(m-6)(m-1).$$

2 pts

$\boxed{1^{\text{er}} \text{ cas} : m \neq 6 \text{ et } m \neq 1}$

Dans ce cas, $\det A \neq 0$ et le système est de Cramer. Il admet une solution unique :

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = 4m^2 - 42m + 108 = 2(2m-9)(m-6)$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & m-5 \end{vmatrix} = 14m - 84 = 14(m-6)$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & m & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -14m + 84 = -14(m-6)$$

Le système admet une solution unique : $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{2m-9}{m-1}; \frac{7}{m-1}; \frac{-7}{m-1}\right)\right\}$. **4 pts**

Interprétation géométrique. Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace qui se coupent en un point de coordonnées $\left(\dfrac{2m-9}{m-1};\dfrac{7}{m-1};\dfrac{-7}{m-1}\right)$. **1 pts**

$\boxed{2^{e}\text{ cas : } m=6}$

On résout le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ -x & + & 6y & + & 2z & = & 5 \\ 7x & + & 3y & + & z & = & 7 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 6y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ 7x & + & 3y & + & z & = & 7 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 6y & + & 2z & = & 5 \\ & & 15y & + & 5z & = & 14 \\ & & 45y & + & 15z & = & 42 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 6y & + & 2z & = & 5 \\ & & 15y & + & 5z & = & 14 \\ & & 15y & + & 5z & = & 14 \end{array}\right.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 6y & + & 2z & = & 5 \\ & & 15y & + & 5z & = & 14 \end{array}\right.$$

On a donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 6y+2z-5 \\ y & = & \frac{14}{15}-\frac{1}{3}z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 6(\frac{14}{15}-\frac{1}{3}z)+2z-5 \\ y & = & \frac{14}{15}-\frac{1}{3}z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{3}{5} \\ y & = & \frac{14}{15}-\frac{1}{3}z \end{array}\right.$$

En posant $z=\alpha$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rclcr} x & = & \frac{3}{5} & & \\ y & = & \frac{14}{15} & - & \frac{1}{3}\alpha \\ z & = & & & \alpha \end{array}\right.$$

Donc : $\mathcal{S}=\left\{\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{14}{15}-\dfrac{1}{3}\alpha;\alpha\right)\mid\alpha\in\mathbb{R}\right\}$. **5 pts**

Interprétation géométrique. Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace qui se coupent suivant la droite passant par le point $A\left(\frac{3}{5};\frac{14}{15};0\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$. **1 pts**

$\boxed{3^{e}\text{ cas}: m=1}$

On résout le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + y + 2z = 5 \\ 7x + 3y - 4z = 7 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 7x + 3y - 4z = 7 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 5 \\ 5y + 5z = 14 \\ 10y + 10z = 42 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 5 \\ 5y + 5z = 14 \\ 5y + 5z = 21 \end{cases}$$

Deux des trois équations sont incompatibles. Donc le système n'admet pas de solution. $\mathcal{S}=\emptyset$. **3 pts**

Interprétation géométrique. Les équations du système sont celles de trois plans de l'espace dont l'intersection est vide. **1 pts**

Exercice 4

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs non colinéaires du plan π.

   Alors :

$$M(x;y;z)\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}\quad(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2\alpha-2\beta \\ y = \alpha-2\beta \\ z-1 = -2\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2\alpha-2\beta \\ y = \alpha-2\beta \\ z = 1-2\alpha \end{cases}$$

De plus : 3 pts

$$M(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & -2 \\ y & 1 & -2 \\ z-1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -4(z-1) + 4y + 2(z-1) - 4(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4z + 4 + 4y + 2z - 2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4x + 4y - 2z + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y + z - 3 = 0$$

3 pts

2. $S(-1;4;-5) \notin \pi$ car $2 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 + (-5) - 3 = -18 \neq 0$.
   $T(5;-2;-2) \notin \pi$ car $2 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) + (-2) - 3 = 9 \neq 0$. 2 pts

3. $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (ST).

   Alors :

$$M(x;y;z) \in (ST) \Leftrightarrow \overrightarrow{SM} = k\overrightarrow{ST} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 &= 6k \\ y-4 &= -6k \\ z+5 &= 3k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= -1+6k \\ y &= 4-6k \\ z &= -5+3k \end{cases}$$

3 pts

4. Soit $I(x_0;y_0;z_0)$ le point d'intersection de π et de (ST). Ses coordonnées vérifient le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 &= -1+6k \\ y_0 &= 4-6k \\ z_0 &= -5+3k \\ 2x_0 - 2y_0 + z_0 - 3 &= 0 \end{cases}$$

   Par substitution :

$$2(-1+6k) - 2(4-6k) + (-5+3k) - 3 = 0 \Leftrightarrow 27k - 18 = 0 \ \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

   et on a donc $x_0 = -1 + 6 \cdot \dfrac{2}{3} = 3$, $y_0 = 4 - 6 \cdot \dfrac{2}{3} = 0$ et $z_0 = -5 + 3 \cdot \dfrac{2}{3} = -3$.
   Le point d'intersection est $I\,(3;0;-3)$. 2 pts