Corrigé (D, juin 2012)

I $P(z)=3z^3+(-4+3i)z^2+(7-7i)z+2i-2$

- $bi \in i\mathbb{R}$ est solution de l'équation $P(z)=0$

$\iff 3(bi)^3+(-4+3i)(bi)^2+(7-7i)bi+2i-2=0$

$\iff -3b^3i+4b^2-3b^2i+7bi+7b+2i-2=0$

$\iff \begin{cases} -3b^3-3b^2+7b+2=0 & (1)\\ 4b^2+7b-2=0 & (2)\end{cases}$

(2) : $\Delta=49+32=81$, $b'=\frac{-7+9}{8}=\frac{1}{4}$, $b''=\frac{-7-9}{8}=-2$

$\to$ (1) : $-3\cdot(-8)-3\cdot 4-14+2=0$ donc $\underline{-2i\in S}$

- $P(z)$ est donc divisible par $z+2i$:

	3	$-4+3i$	$7-7i$	$2i-2$
$-2i$		$-6i$	$8i-6$	$-2i+2$
	3	$-4-3i$	$1+i$	$\underline{\underline{0}}$

- $P(z)=0 \iff z=-2i$ ou $3z^2+(-4-3i)z+1+i=0$ (3)

(3) : $\Delta=(-4-3i)^2-12(1+i)=16+24i-9-12i-12i=-5+12i$

$|\Delta|=\sqrt{25+144}=13$

r.c.c. de Δ : $\delta=\sqrt{\frac{13-5}{2}}+i\sqrt{\frac{13+5}{2}}=2+3i$

$z'=\frac{4+3i+2+3i}{6}=\frac{6+6i}{6}=1+i$

$z''=\frac{4+3i-2-3i}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$S=\left\{-2i\,;\,1+i\,;\,\frac{1}{3}\right\}$

II 1) $z_1=\frac{-21\sqrt{2}-3\sqrt{2}i}{(1-2i)^2}=-3\sqrt{2}\cdot\frac{7+i}{1-4i-4}=-3\sqrt{2}\,\frac{7+i}{-3-4i}\cdot\frac{-3+4i}{-3+4i}$

$=-3\sqrt{2}\,\frac{-21+28i-3i-4}{9+16}=-3\sqrt{2}\,\frac{-25+25i}{25}=-3\sqrt{2}(-1+i)$

$=3\sqrt{2}(1-i)=\underline{3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i}$, (forme alg.)

$|z_1|=\sqrt{18+18}=6$

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi_1=\frac{3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\varphi_1=-\frac{3\sqrt{2}}{6}=-\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right\}\ \varphi_1=-\frac{\pi}{4}$

$\underline{z_1=6\,\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$, (forme trigon.)

$z_2 = \frac{i}{i\sqrt{3}-1} \cdot \frac{-1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{-i+\sqrt{3}}{1+3} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i}$, (forme alg.) ②

$|z_2| = \sqrt{\frac{3}{16}+\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\varphi_2 = -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1} = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{array}\right\} \varphi_2 = -\frac{\pi}{6}$

$\underline{z_2 = \frac{1}{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ (forme trigon.)

2) $Z = \frac{z_1 \cdot z_2}{\sqrt{3}+i}$

- sous forme algébrique:

$Z = \frac{3\sqrt{2}(1-i)\,\frac{1}{4}(\sqrt{3}-i)}{\sqrt{3}+i} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{(1-i)(\sqrt{3}-i)^2}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{(1-i)(\cancel{3}^{\,2}-2\sqrt{3}i\cancel{-1})}{3+1}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{16}\cdot\left(2-2\sqrt{3}i-2i-2\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{\cancel{16}\,8}\cancel{2}\left(1-\sqrt{3}-\sqrt{3}i-i\right)$

$Z = \frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{8} - i\,\frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{8}$

- sous forme trigonométrique:

$z_3 = \sqrt{3}+i$, $|z_3| = \sqrt{3+1} = 2$, $\begin{cases} \cos\varphi_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \\ \sin\varphi_3 = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \end{cases}$ donc $\varphi_3 = \frac{\pi}{6}$

$z_3 = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$

$Z = \frac{\cancel{6}^{\,3}\cdot\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)$

$Z = \frac{3}{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$

- $\begin{cases} \frac{3}{2}\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{8} \\ \frac{3}{2}\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{8} \end{cases} \Big|\cdot\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

III $\begin{cases} x+my+(m+1)z = m & (1) \\ x+my+z = 2m & (2) \\ mx+y+z = 0 & (3) \end{cases}$

chaque équation représente un plan dans l'espace: π_1, π_2 et π_3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m & m+1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{m} + m^2 + m + \cancel{1} - m^2(m+1) - \cancel{1} - \cancel{m}$$
$$= \cancel{m^2} + m - m^3 - \cancel{m^2}$$
$$= m(1-m^2)$$
$$\underline{\Delta} = m(1-m)(1+m)$$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $m = 1$ ou $m = -1$

<u>1er cas</u> : $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1; -1\}$, $\Delta \neq 0$, solution unique

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m & m & m+1 \\ 2m & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 2m(m+1) - m - 2m^2$$
$$= -m^2 + 2m^2 + 2m - m$$
$$= m^2 + m$$
$$= m(m+1)$$

$$x = \frac{\cancel{m(m+1)}}{\cancel{m}(1-m)\cancel{(1+m)}} = \frac{1}{1-m}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & m & m+1 \\ 1 & 2m & 1 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2m + m^2 - 2m^2(m+1) - m$$
$$= m + m^2 - 2m^3 - 2m^2$$
$$= -2m^3 - m^2 + m$$
$$= m(\underbrace{-2m^2 - m + 1}_{\Delta' = 1+8=9,\ m' = \frac{1+3}{-4} = -1,\ m'' = \frac{1-3}{-4} = \frac{1}{2}})$$

$$\Delta_y = m \cdot (-2)(m+1)(m - \tfrac{1}{2})$$
$$= m(m+1)(1-2m)$$

$$y = \frac{\cancel{m(m+1)}(1-2m)}{\cancel{m}\cancel{(1+m)}(1-m)} = \frac{1-2m}{1-m}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & m & 2m \\ m & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2m^3 + m - m^3 - 2m = m^3 - m = -\Delta$$

$$z = \frac{-\Delta}{\Delta} = -1$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{1-m}, \frac{1-2m}{1-m}, -1 \right) \right\}$$

<u>int. géom</u> : π_1, π_2, π_3 se coupent au pt $I\left(\frac{1}{1-m}; \frac{1-2m}{1-m}; -1\right)$

2^e cas : $m=0$

le système devient : $\begin{cases} x+z=0 & (1) \\ x+z=0 & (2) \\ y+z=0 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases}$ $S=\{(-z,-z,z) \mid z\in\mathbb{R}\}$

int. géom ; posons $z=\alpha$: $d \equiv \begin{cases} x=-\alpha \\ y=-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

$\pi_1=\pi_2$ coupent π_3 en la droite d passant par l'origine $O(0,0,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

3^e cas : $m=1$

le système devient : $\begin{cases} x+y+2z=1 & (1) \\ x+y+z=2 & (2) \\ x+y+z=0 & (3) \end{cases}$] impossible $S=\emptyset$

int. géom : $\pi_2\cap\pi_3=\emptyset$ (strictement parallèles)

$\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ vect. normal de π_1 } non colinéaires

$\vec{n}_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ——— π_2

donc π_1 est sécant avec π_2 et π_3.

4^e cas : $m=-1$

le système devient : $\begin{cases} x-y=-1 & (1) \\ x-y+z=-2 & (2) \\ -x+y+z=0 & (3) \end{cases}$

(1) : $x=y-1$

$\to$ (2) : $y-1-y+z=-2 \Leftrightarrow z=-1$

$\to$ (3) : $-y+1+y+z=0 \Leftrightarrow z=-1$

D'où $S=\{(y-1,y,-1) \mid y\in\mathbb{R}\}$

int. géom. : posons $y=\alpha$: $\begin{cases} x=\alpha-1 \\ y=\alpha \\ z=-1 \end{cases} \equiv d'$

Les 3 plans se coupent suivant la droite d' qui passe par $A(-1,0,-1)$ et de vect. directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

IV 1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\16\end{pmatrix}$ sont deux vect. directeurs de $\mathcal{P}$

d'où: $\mathcal{P} \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha - 2\beta \\ y = -1 + 4\alpha + 5\beta \\ z = \quad\; 5\alpha + 16\beta \end{cases}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ (syst. d'éq. param.)

$M(x,y,z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z\end{pmatrix} =$ comb. linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\iff \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ y+1 & 4 & 5 \\ z & 5 & 16 \end{vmatrix} = 0$

$\iff 64(x-1) + 5z - 10(y+1) + 8z - 25(x-1) - 16(y+1) = 0$

$\iff 39(x-1) - 26(y+1) + 13z = 0 \quad |:13$

$\iff 3(x-1) - 2(y+1) + z = 0$

$\iff 3x - 3 - 2y - 2 + z = 0$

$\mathcal{P} \equiv 3x - 2y + z - 5 = 0$ (éq. cartésienne)

b) $\Pi \equiv \begin{cases} x = \alpha + 2\beta & (1) \\ y = \alpha & (2) \\ z = -2\beta & (3) \end{cases}$ (2) et (3) dans (1) : $x = y - z$

d'où $\Pi \equiv x - y + z = 0$

2) $d' \equiv \begin{cases} 3x - 2y + z = 5 & (1) \\ x - y + z = 0 & (2) \end{cases}$

(1) $\iff z = 5 - 3x + 2y$

$\rightarrow$ (2) : $x - y + 5 - 3x + 2y = 0 \iff -2x + y + 5 = 0 \iff \underline{y = 2x - 5}$

donc $z = 5 - 3x + 4x - 10 = x - 5$

en posant $x = k$ on obtient : $d' \equiv \begin{cases} x = k \\ y = -5 + 2k \\ z = -5 + k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$

$D(-1, 0, -6) \in d' \iff \exists k \begin{cases} -1 = k \\ 0 = -5 + 2k \\ -6 = -5 + k \end{cases} \iff \exists k \begin{cases} k = -1 \\ k = \frac{5}{2} \\ k = -1 \end{cases}$ impossible

donc $D \notin d'$

3) $I(x,y,z) \in \Pi \cap d' \iff \begin{cases} x - y + z = 0 & (1) \\ x = 4 + 3m & (2) \\ y = -2 + m & (3) \\ z = 2 - 5m & (4) \end{cases}$

(2), (3), (4) dans (1) : $4 + 3m + 2 - m + 2 - 5m = 0 \iff -3m + 8 = 0$

$\iff m = \frac{8}{3}$

d'où : $x = 4 + \cancel{3} \cdot \frac{8}{\cancel{3}} = 12$

$y = -2 + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

$z = 2 - 5 \cdot \frac{8}{3} = -\frac{37}{3}$

$I\left(12, \frac{2}{3}, -\frac{37}{3}\right) \in \Pi \cap d'$