CORRIGÉ

QUESTION I

1. $$z = (\underbrace{1-i}_{z_1})^{12} (\underbrace{\sqrt{3} - 3i}_{z_2})$$

$$|z_1| = \sqrt{2}$$
$$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{-\pi}{4}$$

$$|z_2| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$
$$z_2 = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 2\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{-\pi}{3}$$

$$z_1^{12} = (\sqrt{2})^{12} \operatorname{cis} \frac{-12\pi}{4}$$
$$= 2^6 \operatorname{cis} -3\pi$$
$$= 2^6 \operatorname{cis} \pi$$

Ainsi, $$z = \left(2^6 \operatorname{cis} \pi\right) \cdot \left(2\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{-\pi}{3}\right)$$
$$= 2^7\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$$
$$= 128\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= -64\sqrt{3} + i\,192$$

2. $$z^5 - \sqrt{2}(i-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow z^5 = \sqrt{2}(i-1) \qquad \Big\{\ |z^5| = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$$
$$\Leftrightarrow z^5 = 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow z^5 = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$$
$$\Leftrightarrow z_k = \sqrt[5]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi/4}{5} + k\frac{2\pi}{5}\right) \qquad k \in \{0,1,2,3,4\}$$
$$\Leftrightarrow z_k = \sqrt[5]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{20} + k\frac{8\pi}{20}\right)$$

$$z_0 = \sqrt[5]{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{20}$$
$$z_1 = \sqrt[5]{2} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{20}$$
$$z_2 = \sqrt[5]{2} \operatorname{cis} \frac{19\pi}{20}$$
$$z_3 = \sqrt[5]{2} \operatorname{cis} \frac{27\pi}{20}$$
$$z_4 = \sqrt[5]{2} \operatorname{cis} \frac{35\pi}{20}$$

$$S = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$$

3. $(i-2)z = (2-i)(2+i) + z$

$\Leftrightarrow (i-2)z = (4+1) + z$

$\Leftrightarrow (i-3)z = 5$

$\Leftrightarrow \quad z = \frac{5}{-3+i} \cdot \frac{-3-i}{-3-i}$

$\Leftrightarrow \quad z = \frac{-5(3+i)}{9+1}$

$\Leftrightarrow \quad z = \frac{-3-i}{2}$

$\Leftrightarrow \quad z = \frac{-3}{2} - i\frac{1}{2}$ $\qquad S = \left\{-\frac{3}{2} - i\frac{1}{2}\right\}$

4. $P(z) = z^3 + 5iz^2 - 2(4+i)z + 2 - 4i$

Si $z = bi$ $(b \in \mathbb{R})$ est une racine imaginaire pure, alors on a $P(bi) = 0$

$\Leftrightarrow (bi)^3 + 5i(bi)^2 + (-8-2i)(bi) + 2 - 4i = 0$

$\Leftrightarrow -b^3 i - 5b^2 i - 8bi + \underline{2b} + \underline{2} - 4i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 2 = 0 & (1) \\ -b^3 - 5b^2 - 8b - 4 = 0 & (2) \end{cases}$

(1) : $b = -1$

Vérifions (2) : $-(-1)^3 - 5(-1)^2 - 8(-1) - 4 \overset{?}{=} 0$

$1 - 5 + 8 - 4 \overset{!}{=} 0$

Ainsi $z = -i$ est la racine imaginaire pure cherchée

$\boxed{\text{QUESTION II}}$

1. $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$B \cdot A - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} ax - y + z = -2 \\ 2x + y + 3z = -3a \\ ax + 2y + z = 1 \end{cases}$ $(a \in \mathbb{R})$

a) Soit A la matrice du système.

A singulière $\iff \det A = 0$

$\iff \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} a & -1 \\ 2 & 1 \\ a & 2 \end{matrix}$

$\iff \underline{a} - \underline{3a} + 4 \overline{-a} - \underline{6}a + 2 = 0$

$\iff -9a + 6 = 0$

$\iff a = \frac{-6}{-9}$

$\iff a = \frac{2}{3}$

b) $\boxed{a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}}$ le système admet une solution unique

- $\det A_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -3a & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & -1 \\ -3a & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$

$= -2 - 3 \underline{-6a} - 1 + 12 \underline{-3a}$

$= -9a + 6$

$\Rightarrow x = \frac{\det A_1}{\det A} = 1$

- $\det A_2 = \begin{vmatrix} a & -2 & 1 \\ 2 & -3a & 3 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} a & -2 \\ 2 & -3a \\ a & 1 \end{matrix}$

$= \underline{\underline{-3a^2}} \underline{-6a} + 2 \underline{\underline{+3a^2}} \underline{-3a} + 4$

$= -9a + 6$

$\Rightarrow y = \frac{\det A_2}{\det A} = 1$

- $\det A_3 = \begin{vmatrix} a & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -3a \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} a & -1 \\ 2 & 1 \\ a & 2 \end{matrix}$

$= \underline{a} + \underline{\underline{3a^2}} - 8 \underline{+2a} + \underline{\underline{6a^2}} + 2$

$= 9a^2 + 3a - 6$

$= 3(3a^2 + a - 2)$

$= 3 \cdot 3 \left(a - \frac{2}{3}\right)(a+1)$ $\quad \begin{cases} \rho = 25 \\ a_1 = \frac{2}{3} \quad a_2 = -1 \end{cases}$

eco-logic

$$\det A_3 = 3(3a-2)(a+1)$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{3(3a-2)(a+1)}{-9a+6} = -a-1$$

$$S = \{(1, 1, -a-1)\}$$

Les éq. du système sont celles de 3 plans ayant un seul pt. commun.

$\boxed{a = \frac{2}{3}}$ Le système s'écrit $\begin{cases} \frac{2}{3}x - y + z = -2 & |\cdot 3 \\ 2x + y + 3z = -2 \\ \frac{2}{3}x + 2y + z = 1 & |\cdot 3 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} (E_2) & (E_2)-(E_1) \\ (E_3) & (E_3)-(E_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 0 & 9 \end{array}$$

éq. équivalentes

Le syst. s'écrit : $\begin{cases} 2x - 3y + 3z = -6 & (1) \\ y = 1 & (2) \end{cases}$

(2) ds (1) : $2x - 3 + 3z = -6$

$$\Leftrightarrow 2x = -3z - 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3}{2}z - \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}, 1, \alpha \right) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Les éq. du système sont celles de 3 plans distincts qui se coupent suivant une droite (dirigée par $\vec{u}\left(-\frac{3}{2}, 0, 1\right)$ et comprenant $A\left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right)$).

QUESTION III

1. a) 15 enf. de 3 ans $\longrightarrow \frac{2}{3} \cdot 15 = 10$ savent nager
12 enf. de 10 ans $\longrightarrow \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$
27 enf. — 19 savent nager

$$P = \frac{19}{27} \simeq 0,7037$$

b) $P = \frac{9}{19} \simeq 0,4737$

c) $X \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X=0) = \frac{C_{12}^{3}}{C_{27}^{3}} = \frac{220}{2925} = \frac{44}{585} \simeq 0,0752$$

$$P(X=1) = \frac{C_{12}^{2} \cdot C_{15}^{1}}{C_{27}^{3}} = \frac{990}{2925} = \frac{22}{65} \simeq 0,3385$$

$$P(X=2) = \frac{C_{12}^{1}\ C_{15}^{2}}{C_{27}^{3}} = \frac{1260}{2925} = \frac{28}{65} \simeq 0,4308$$

$$P(X=3) = \frac{C_{15}^{3}}{C_{27}^{3}} = \frac{455}{2925} = \frac{7}{45} \simeq 0,1556$$

(TOTAL $= 1$)

2. T E R M I N A L : 8 lettres — 5 consonnes, 3 voyelles

tirer successivement 4 plaques, ordre joue un rôle

a) $A_8^4 = 1680$ mots

b) $4 \cdot A_7^3 = 4 \cdot 210 = 840$ mots

R

arranger 3 lettres diff. de R

choisir une position pour R

c) $C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot P_4 = 10 \cdot 3 \cdot 24 = 720$ mots

permutations des 4 lettres choisies

choisir 2 consonnes

choisir 2 voyelles