Corrigé (Maths 1, C)

Ex 1 (12)

1) déterminant du système :

$$\begin{vmatrix} 1 & m^2 & 1 \\ m-1 & -2 & 2m \\ 1 & -m & 1 \end{vmatrix} = m\cdot(m+1)^2$$

le système admet une sol unique si $m(m+1)^2 \neq 0$ si $m \neq 0$ et $m \neq -1$

2) si $\underline{m=0}$ le système devient

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ -x - 2y = 0 \\ \cancel{x + z = 1} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ z = 1-x = 1+2y \end{cases} \quad \text{(syst. simpl. indét.)}$$

et $S = \{(-2\alpha ; \alpha ; 1+2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

Les éq. du syst. représentent 3 plans qui se coupent en une droite passant par $A(0;0;1)$ et de vec. dir $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3) si $\underline{m=-1}$ le système devient

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \cancel{-2x - 2y - 2z = -2} \quad \cancel{\mid \cdot(-2)} \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \iff x = 1-y-z \quad \text{(syst. doubl. indét.)}$$

et $S = \{(1-\alpha-\beta ; \alpha ; \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Les éq. du syst représentent 3 plans confondus passant par $B(1;0;0)$ et de vec. dir $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ex 2 (8)

1) $M(x;y;z) \in \Pi \iff \begin{cases} x = 1 - \alpha - 2\beta \\ y = 2 + 2\alpha + \beta \\ z = -1 - 3\alpha + 3\beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

2) $M(x;y;z) \in \Pi \iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$

$$\iff \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -2 \\ y-2 & 2 & 1 \\ z+1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 3x + 3y + z - 8 = 0$$

3) $\Pi' \parallel \Pi \implies \Pi' : 3x + 3y + z + d = 0$

$B(-1,-1,3) \in \pi' \iff -3-3+3+d=0 \iff d=3$

donc : $\pi' : 3x+3y-z+3=0$

Ex 3 (10)

1)

	1	$2i-4$	$6-7i$	$7i-1$
$z=1-i$		$-i+1$	$-2+4i$	$-7i+1$
	1	$i-3$	$4-3i$	0

donc : $P(1-i)=0$

2) $P(z)=0$

$\iff (z-(1-i))\left(z^2+(i-3)z+(4-3i)\right)=0$

$\iff z=1-i$ ou $z^2+(i-3)z+(4-3i)=0$

$a=1$; $b=i-3$; $c=4-3i$; $\Delta=-8+6i$

$(x+iy)^2=-8+6i$

$\iff \begin{cases} x^2-y^2=-8 \\ x^2+y^2=10 \\ x,y \text{ de même signe} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2=2 \\ 2y^2=18 \\ x,y \text{ de même signe} \end{cases} \iff \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 3 \\ x,y \text{ de même signe} \end{cases}$

donc : $\Delta=(1+3i)^2$

$\iff z=1-i$ ou $z=\dfrac{3-i\pm(1+3i)}{2}$

$\iff z=1-i$ ou $z=1-2i$ ou $z=2+i$

donc : $S=\{1-i ; 1-2i ; 2+i\}$

Ex 4 (10)

1) * $z_2=-4i=4\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

* $a=-\frac{\sqrt{6}}{2}$; $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $r=\sqrt{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}}=\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi=\dfrac{-\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi=\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

donc : $z_3=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

* $Z=\dfrac{\left[2\operatorname{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]^4\left[4\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]^2}{\left[\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]^6}=\dfrac{2^4\operatorname{cis}(-3\pi)\cdot 4^2\operatorname{cis}(-\pi)}{2^3\operatorname{cis}(5\pi)}=32\,\dfrac{\operatorname{cis}(-4\pi)}{\operatorname{cis}(5\pi)}$

$=32\operatorname{cis}(-9\pi)=32\operatorname{cis}(\pi)$

2) $Z=-32$

3) $\rho\operatorname{cis}\theta$ est racine ~~cubique~~ cinquième de -32 $(\rho>0)$

ssi $(\rho\operatorname{cis}\theta)^5=32\operatorname{cis}\pi$

$\Leftrightarrow \quad \rho^5 \operatorname{cis} 5\theta = 32 \operatorname{cis} \pi$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^5 = 32 \\ 5\theta = \pi \quad [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{5} \quad \left[\frac{2\pi}{5}\right] \end{cases}$

Les racines 5^e de Z sont : $\rho_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{5}$; $\rho_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{5}$; $\rho_3 = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{5} = -2$

$\rho_4 = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{5}$; $\rho_5 = 2 \operatorname{cis} \frac{9\pi}{5}$

Ex 5 (20)

1) $\left(5x^3 - \frac{1}{\sqrt{5}\,x^2}\right)^{17} = \sum_{k=0}^{17} C_{17}^{k} (5x^3)^k \left(\frac{-1}{\sqrt{5}\,x^2}\right)^{17-k}$

$= \sum_{k=0}^{17} C_{17}^{k}\, 5^k \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^{17-k} x^{3k-2(17-k)}$

condition : $3k - 2(17-k) = 1 \Leftrightarrow 3k - 34 + 2k = 1 \Leftrightarrow 5k = 35 \Leftrightarrow k = 7$

terme en x : $C_{17}^{7}\, 5^7 \frac{(-1)^{10}}{(\sqrt{5})^{10}}\, x = C_{17}^{7} \cdot 5^2\, x = 19448 \cdot 25\, x = 486200\, x$

2) $\Omega = \{$mains à 6 cartes$\}$; $\# \Omega = C_{32}^{6}$

a) A : "obtenir exactement 2 dames" ; $p(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_{28}^4}{C_{32}^6} = \frac{122850}{906192} = \frac{975}{7192} \simeq 0{,}14$

b) B : "obtenir exactement 4 rois" ; $p(B) = \frac{C_{28}^2 \cdot C_4^4}{C_{32}^6} = \frac{3}{7192} \simeq 0{,}0004$

$\overline{B}$: "obtenir au plus 3 rois" ; $p(\overline{B}) = 1 - p(B) \simeq 0{,}9996$

c) C : "obtenir aucun as" ; $P(C) = \frac{C_{28}^6}{C_{32}^6} = \frac{1495}{3596} \simeq 0{,}42$

$\overline{C}$ "obtenir au moins un as" ; $P(\overline{C}) = 1 - P(C) \simeq 0{,}58$

3) On tire 2 boules au hasard successivement sans remise

$\# \Omega = 15 \cdot 14 = 210$

a) A "tirer 2 boules noires" ; $p(A) = \frac{7 \cdot 6}{15 \cdot 14} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

b) B "tirer 2 boules de même couleur" ; $p(B) = \frac{7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2}{15 \cdot 14} = \frac{34}{105} \simeq 0{,}32$