Examen de fin d'études secondaires 2009

Section C Mathématiques I

Question I

1) $\forall z \in \mathbb{C}_0 - \{-i\}$.

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{z+i} = -1 \iff 2(z+i) - z = -z\cdot(z+i)$$

$$\iff z^2 + (1+i)z + 2i = 0 \qquad (E)$$

$$\Delta = (1+i)^2 - 4\cdot 1\cdot 2i = -6i$$

soit $\delta = x + yi$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 6 & (1) \\ x^2 - y^2 = 0 & (2) \\ 2xy = -6 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2)$: $2x^2 = 6 \iff x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}$

$(1)-(2)$: $2y^2 = 6 \iff y^2 = 3 \iff y = \pm\sqrt{3}$

(3) : x et y sont de signes contraires

d'où $\Delta = (\sqrt{3} - \sqrt{3}i)^2$

$$(E) \iff z = \frac{-(1+i) + (\sqrt{3} - \sqrt{3}i)}{2} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-(1+i) - (\sqrt{3} - \sqrt{3}i)}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2} i \; ; \; \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2} i \right\}$$

2) a) $$Z = \frac{6(\sqrt{3} - i) - 4(1 + \sqrt{3}i)}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i}$$

$$= \frac{12(\sqrt{3} - i) - 8(1+\sqrt{3}i) - 18i(\sqrt{3} - i) + 12i(1 + \sqrt{3}i)}{4+9}$$

$$= \frac{\cancel{12\sqrt{3}} - \cancel{12i} - 8 - 8\sqrt{3}i - 18\sqrt{3}i - 18 \cancel{+12i} - \cancel{12\sqrt{3}}}{13}$$

$$= \frac{-26 - 26\sqrt{3}i}{13} = -2 - 2\sqrt{3}i$$

b) $|Z| = \sqrt{4 + 4\cdot 3} = 4 \qquad Z = 4\cdot\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4 \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

soit $z = r \operatorname{cis} \varphi$

$$z^4 = Z \iff \begin{cases} r^4 = 4 \\ 4\varphi = -\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \varphi = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

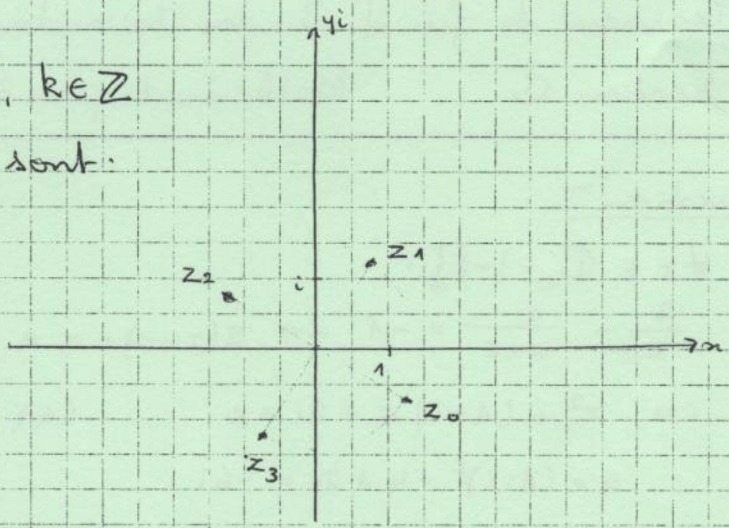
les racines $4^{\text{èmes}}$ de Z sont:

$z_0 = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$z_1 = \sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{\pi}{3}$

$z_2 = \sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{5\pi}{6}$

$z_3 = \sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{4\pi}{3}$



Question II

1) a)
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ m & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 6m + 14 - 21 - 3m + 4 = 3m - 6 = 3(m-2)$$

le système admet une solution unique si et seulement si $m \in \mathbb{R} - \{2\}$.

b) pour $m = 2$, le système devient $\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ 7x - 2y + 3z = 15 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 & (E_1) \\ 2x - y + 2z = 5 & (E_2) \\ 7x - 2y + 3z = 15 & (E_3) \end{cases} \quad \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 3 \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cdot 1 \\ \\ \cdot 1 \end{matrix}$$

$$\Downarrow \quad \begin{matrix} (E_2)\ /\ 2(E_1) + 3(E_2) \\ (E_3)\ /\ (E_1) + (E_2) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 8x - y = 15 \\ 8x - y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ y = 8x - 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8x - 15 \\ 3z = 9x - 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 8x - 15 \\ z = 3x - 5 \\ x \text{ qc.} \end{cases} \qquad S = \{(x; 8x-15; 3x-5) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Si $m = 2$, le système est un système de 3 équations de plans de l'espace se coupant selon la droite de repère $(A, \vec{u})$ où $A(0, -15, -5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) a) $A \in d \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3+2\lambda \\ -3 = -2-\lambda \\ 5 = 1+3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = -1 \\ \lambda = 1 \\ 3\lambda = 4 \end{cases}$ impossible, donc $\underline{A \notin d}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d, donc de π.

$B(3;-2,1)$ est un point de d, donc de π

le vecteur $\vec{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de π, non colinéaire à $\vec{u}$.

Ainsi : $X(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow \text{dét}(\vec{AX}, \vec{u}, \vec{AB}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 2 & 1 \\ y+3 & -1 & 1 \\ z-5 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot 1 - (y+3)(-11) + (z-5)\cdot 3 = 0$

$\Leftrightarrow x + 11y + 3z + 16 = 0$

d'où $\underline{\pi \equiv x + 11y + 3z + 16 = 0}$

c) $\vec{u}$ est un vecteur normal à π'.

π' a donc une équation du type $2x - y + 3z + d = 0$

$A \in \pi' \Leftrightarrow 2\cdot 2 - (-3) + 3\cdot 5 + d = 0 \Leftrightarrow d = -22$

d'où : $\underline{\pi' \equiv 2x - y + 3z - 22 = 0}$

d) d' passe par A et $\vec{u}$ est vecteur directeur de d'.

$d' \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ syst. d'équ. paramétriques.

$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$ $\Big/ \begin{matrix} \cdot 1 \\ \cdot 2 \end{matrix}$ $\Big/ \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 1 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ x + 2y = -4 \\ 3y + z = -4 \end{cases}$

d'où: $d' \equiv \begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ 3y + z + 4 = 0 \end{cases}$ syst. d'équations cartésiennes.

Question III

1) $\left(3x^3+\frac{2}{x^2}\right)^{10}=\sum_{i=0}^{10} C_{10}^{i}\,(3x^3)^{10-i}\cdot\left(\frac{2}{x^2}\right)^{i}=\sum_{i=0}^{10} C_{10}^{i}\,3^{10-i}\,2^{i}\,x^{30-5i}$

$30-5i=10 \Leftrightarrow i=4$

le terme cherché est : $C_{10}^{4}\cdot 3^{6}\cdot 2^{4}\,x^{10}=2449440\,x^{10}$

2) l'univers est l'ensemble des mains de 8 cartes.

$\# \Omega = C_{32}^{8} = 10518300$

a) soit A l'événement "obtenir exactement 1 roi, 2 dames et 3 valets".

Il faut donc 1 roi parmi 4, 2 dames parmi 4, 3 valets parmi 4 et encore 2 cartes parmi les 20 qui restent.

$\# A = C_4^1\cdot C_4^2\cdot C_4^3\cdot C_{20}^2 = 4\cdot 6\cdot 4\cdot 190 = 18240$

$p(A)=\frac{18240}{10518300}=\frac{304}{175305}\simeq 0{,}0017$

b) soit B l'événement "obtenir au moins un as"

$\overline{B}$ est l'événement "obtenir aucun as" c-à-d "obtenir 8 cartes parmi les 28 qui ne sont pas "as" "

$\# \overline{B} = C_{28}^{8} = 3108105$

$p(\overline{B})=\frac{3108105}{10518300}=\frac{5313}{17980}\simeq 0{,}2955$

$p(B)=1-p(\overline{B})\simeq 0{,}7045$

c) soit C l'événement "obtenir exactement 5 cartes d'une même couleur"

Il y a 4 choix possibles pour cette couleur.

et C_8^5 choix favorables pour obtenir 5 cartes de cette couleur,

reste à choisir 3 cartes parmi les 24 qui restent

$\# C = 4\cdot C_8^5\cdot C_{24}^3 = 4\cdot 56\cdot 2024 = 453376$

$p(C)\simeq 0{,}0431$

3) a) $\underbrace{\_\ \_}_{\text{2 lettres}}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{\text{4 chiffres}}$

nombre de choix possibles : $26 \cdot 26 \cdot (10^4 - 1) = 6759324$

$\# \Omega = 6759324$

b) nombre de cas favorables pour l'événement A "obtenir un numéro d'immatriculation comprenant des lettres distinctes et des chiffres tous distincts"

$$\# A = 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$

$$= A_{26}^{2} \cdot A_{10}^{4} = 3276000$$

$$p(A) = \frac{3276000}{6759324} = \frac{7000}{14443} \simeq 0,4847$$
