Corrigé (MathI, section C, repêchage juin 09) ①

I 1) $P(-5i) = 2\cdot 125i + (14i-5)(-25) + 23(1+i)5i - 10 - 15i$

$= 250i - 350i + 125 + 115i - 115 - 10 - 15i$

$\overset{!}{=} 0$

Donc $P(z)$ divisible par $z+5i$ :

| | $2$ | $14i-5$ | $-23-23i$ | $-10-15i$ |
|---|---|---|---|---|
| $-5i$ | | $-10i$ | $20+25i$ | $15i+10$ |
| | $2$ | $4i-5$ | $-3+2i$ | $0$ |

$P(z) = (z+5i)\left(2z^2 + (4i-5)z - 3 + 2i\right)$

racines de $2z^2 + (4i-5)z - 3 + 2i$ : $\Delta = -16 - 40i + 25 + 24 - 16i = 33 - 56i$

$|\Delta| = \sqrt{33^2 + 56^2} = 65$

une r.c.c. de $\Delta$ : $\delta = \sqrt{\frac{65+33}{2}} - i\sqrt{\frac{65-33}{2}}$

$= 7 - 4i$

$z' = \frac{-4i+5+7-4i}{4} = \frac{12-8i}{4} = 3 - 2i$

$z'' = \frac{-4i+5-7+4i}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

D'où $P(z) = (z+5i)\cdot 2\cdot(z-3+2i)\left(z+\frac{1}{2}\right) = (z+5i)(z-3+2i)(2z+1)$

2) $A = -\sqrt{48} - 4i$

a) $|A| = \sqrt{48+16} = \sqrt{64} = 8$

$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{48}}{8} = -\frac{\cancel{4}\sqrt{3}}{\cancel{8}2} = -\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\varphi = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$ donc $\varphi = \frac{7\pi}{6}$ $[2\pi]$

$A = 8\cdot \operatorname{cis}\frac{7\pi}{6}$

b) r. cub. complexes : $z_k = \sqrt[3]{8}\cdot \operatorname{cis}\frac{\frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi}{3}$ , $k = 0, 1, 2$

$z_0 = 2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{18}$ ; $z_1 = 2\operatorname{cis}\frac{19\pi}{18}$ ; $z_2 = 2\cdot\operatorname{cis}\frac{31\pi}{18}$

c) $A^6 = 8^6\cdot \operatorname{cis}\frac{7\pi}{\cancel{6}}\cdot\cancel{6} = -8^6 \overset{!}{\in} \mathbb{R}$

d) $A^3 = 8^3 \operatorname{cis}\frac{7\pi}{\cancel{6}2}\cdot\cancel{3} = 8^3\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2} = -8^3 i \overset{!}{\in} i\mathbb{R}$

II a) $d$ : $A(3,0,-1)$, v.d. $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$

$M(x,y,z) \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}\ \ \vec{AM} = k\cdot\vec{u} \Leftrightarrow \exists k \begin{cases} x = 3 - 2k & (1) \\ y = k & (2) \\ z = -1 + 3k & (3) \end{cases}$

$(2)\to(1)$: $x = 3-2y \Leftrightarrow x+2y=3$

$(2)\to(3)$: $z=-1+3y \Leftrightarrow 3y-z=1$

$$d \equiv \begin{cases} x+2y=3 \\ 3y-z=1 \end{cases}$$

b) pour $k=2$: $x=3-4=-1$; $y=2$; $z=-1+3\cdot2=5$ donc $B(-1,2,5) \overset{!}{\in} d$

c) $d \perp \pi \Leftrightarrow \vec{u}$ = v.dir. de $d$ = v. normal à $\pi$

$M(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\vec{u}=0$

$\Leftrightarrow (x+1)\cdot(-2)+(y-2)\cdot1+(z-5)\cdot3=0$

$\Leftrightarrow \underline{-2x+y+3z-19=0 \equiv \pi}$

d) $C(5,2,\alpha)\in\pi \Leftrightarrow -10+2+3\alpha-19=0 \Leftrightarrow 3\alpha=27 \Leftrightarrow \underline{\alpha=9}$

Pour $C(5,2,9)$ on a:

$B\in d\cap\pi$, $d\perp\pi$, $C\in\pi$, $A\in d$ donc $BC\perp BA$ et $\Delta(ABC)$ est un triangle rectangle en $B$

$\left( \begin{matrix} \overline{BA} = \sqrt{4^2+2^2+6^2} = \sqrt{56} \\ \overline{BC} = \sqrt{6^2+0^2+4^2} = \sqrt{52} \end{matrix} \right) \neq$ donc $\Delta(ABC)$ $\neq$ isocèle)

2) $\begin{cases} -6x+3y-9z=5 & (1) \equiv \pi_1 \\ mx-5y+15z=0 & (2) \equiv \pi_2 \\ x+y-z=1 & (3) \equiv \pi_3 \end{cases}$

a) solution unique $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -6 & 3 & -9 \\ m & -5 & 15 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Leftrightarrow -30+\cancel{45}-9m-\cancel{45}+90+3m\neq0$

$\Leftrightarrow -6m\neq-60$

$\Leftrightarrow \underline{m\neq10}$

b) • pour $\underline{m\neq10}$, $\pi_1,\pi_2$ et $\pi_3$ se coupent en un point, donc ils ne sont pas parallèles

• pour $\underline{m=10}$, $\pi_2 \equiv 10x-5y+15z=0 \;|:5$

$\pi_2 \equiv 2x-y+3z=0$

$(1)|:(-3) \Leftrightarrow 2x-y+3z=-\frac{5}{3} \equiv \pi_1$

donc $\pi_1\cap\pi_2=\phi$ (donc $S=\phi$)

$\pi_1 \parallel \pi_3 \Leftrightarrow \vec{n}_1\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ colinéaires (vecteurs normaux!)

$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\ \vec{n}_1=k\cdot\vec{n}_3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2=k \\ -1=k \\ 3=-k \end{cases}$ impossible.

donc $\pi_1 \nparallel \pi_3$

Conclusion: $\pi_1,\pi_2$ et $\pi_3$ ne sont parallèles pour aucun $m\in\mathbb{R}$

III 1) $\left(4x^3 - \frac{1}{2x^2}\right)^{15} = \sum_{i=0}^{15} C_{15}^{15-i} (4x^3)^{15-i} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)^i$

$= \sum_{i=0}^{15} C_{15}^{15-i}\, 4^{15-i} \left(-\frac{1}{2}\right)^i x^{45-3i-2i}$

$45 - 5i = 0 \iff i = 9$

terme constant $= C_{15}^{6}\, 4^6 \left(-\frac{1}{2}\right)^9 x^0 = -\frac{15!\; 4^6}{6!\, 9!\, 2^9} = -40\,040$

2) $\Omega = \{$nombres à 3 chiffres pris parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6$\}$, $\#\Omega = 6^3 = 216$

équiprobabilité

a) $A = \{x \in \Omega \mid x$ se termine par 5$\}$, $\#A = 6 \cdot 6 \cdot 1 = 6^2$

$p(A) = \frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6}$

b) $B = \{x \in \Omega \mid 170 \leq x \leq 410\} = \{x \in \Omega \mid x$ commence par 2 ou 3$\}$

$\#B = 2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$

$p(B) = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$

c) $C = \{x \in \Omega \mid$ la somme des chiffres de $x$ vaut 6$\}$

Les 3 chiffres sont : 4, 1, 1 $\to$ 3 possibilités : 411, 141, 114

3, 2, 1 $\to$ $3! = 6$ poss.

2, 2, 2 $\to$ 1 poss.

donc $\#C = 3 + 6 + 1 = 10$ et $p(C) = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$

3) $\Omega = \{$mains à 5 cartes$\}$, $\#\Omega = C_{32}^5 = 201\,376$, équiprobabilité

a) $A = \{x \in \Omega \mid x$ comporte au moins 1 carreau$\}$

$\overline{A} = \{x \in \Omega \mid x$ ne comporte aucun carreau$\}$

$\underbrace{\text{8 carreaux}}$, $\underbrace{\text{24 autres}}$

$\#\overline{A} = C_{24}^5$ donc $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{24}^5}{C_{32}^5} = \frac{2837}{3596} \simeq 0{,}79$

b) $B = \{x \in \Omega \mid x$ ne comporte ni as, ni roi, ni trèfle$\}$

$\underbrace{\text{8 trèfles + 3 as + 3 rois}}$, $\underbrace{\text{18 autres}}$ donc $\#B = C_{18}^5$

$p(B) = \frac{C_{18}^5}{C_{32}^5} = \frac{153}{3596} \simeq 0{,}04$

c) $C = \{x \in \Omega \mid x$ comporte 2 cartes d'une couleur et 1 carte pour chacune des autres couleurs$\}$

- 4 poss. pour choisir la couleur à 2 cartes
- ensuite il y a $C_8^2 \cdot C_8^1 \cdot C_8^1 \cdot C_8^1$ poss.

D'où $\#C = 4 \cdot C_8^2 \cdot 8^3 = 57\,344$

$p(C) = \frac{57\,344}{C_{32}^5} = \frac{256}{899} \simeq 0{,}28$