Corrigé Mathématiques I C

I. 1) $P(z) = z^3 + \left(-3\sqrt{3} + 3i\right) z^2 + \left(6 - 6i\sqrt{3}\right) z + 16i$

$z = bi$ $(b \in \mathbb{R})$ est une solution imaginaire pure de $P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{3}\,b^2 + 6\sqrt{3}b = 0 & (1) \\ -b^3 - 3b^2 + 6b + 16 = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{3}\,b\,(b+2) = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ou $b = -2$

- $b = 0$ ne vérifie pas (2)
- $b = -2$ vérifie (2) : $-(-2)^3 - 3(-2)^2 + 6(-2) + 16 = 8 - 12 - 12 + 16 \stackrel{!}{=} 0$

La solution imaginaire pure de $P(z) = 0$ est donc $\boxed{z_0 = -2i}$

Effectuons la division de $P(z)$ par $(z + 2i)$:

	1	$-3\sqrt{3}+3i$	$6-6i\sqrt{3}$	$16i$
$-2i$		$-2i$	$2+6i\sqrt{3}$	$-16i$
	1	$-3\sqrt{3}+i$	8	0

Ainsi $\forall z \in \mathbb{C}$,
$P(z) = (z + 2i)\left[z^2 + \left(-3\sqrt{3} + i\right) z + 8\right]$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -2$ ou $z^2 + \left(-3\sqrt{3} + i\right) z + 8 = 0.$

Résolvons l'éq. : $z^2 + \left(-3\sqrt{3} + i\right) z + 8 = 0$

$\Delta = \left(-3\sqrt{3} + i\right)^2 - 32 = 27 - 6i\sqrt{3} - 1 - 32 = -6 - 6i\sqrt{3}$

Cherchons les racines carrées complexes $\delta = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ de Δ :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -6 \\ 2xy = -6\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = \sqrt{36 + 36 \cdot 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -6 \\ 2xy = -6\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 6 \\ 2y^2 = 18 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3} \\ y = -3 \text{ ou } y = 3 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Ainsi $\delta_1 = -\sqrt{3} + 3i$ et $\delta_2 = \sqrt{3} - 3i$

$z_1 = \dfrac{3\sqrt{3} - i - \sqrt{3} + 3i}{2} = \boxed{\sqrt{3} + i}$; $z_2 = \dfrac{3\sqrt{3} - i + \sqrt{3} - 3i}{2} = \boxed{2\sqrt{3} - 2i}$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$: $\underline{\underline{S = \left\{-2i; \sqrt{3} + i; 2\sqrt{3} - 2i\right\}}}$

2)
- $$z = \frac{(2+2i)^3}{\left(-2\sqrt{3} + 6i\right)^2} = \frac{8 + 24i - 24 - 8i}{12 - 24\sqrt{3}i - 36} = \frac{-16 + 16i}{-24 - 24i\sqrt{3}} = \frac{-16\left(1 \overset{-}{\cancel{+}} i\right)}{-24\left(1 + i\sqrt{3}\right)}$$
  $$= \frac{2\left(1 \overset{-}{\cancel{+}} i\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right)}{3\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right)} = \frac{2\left(1 \overset{-}{\cancel{+}} i\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right)}{3 \cdot 4} = \frac{1 - i\sqrt{3} \overset{-}{\cancel{+}} i \overset{-}{\cancel{+}} \sqrt{3}}{6} = \boxed{\frac{1 \overset{-}{\cancel{+}} \sqrt{3}}{6} + \frac{-1 - \sqrt{3}}{6} i}$$
- Soit $z_1 = 2 + 2i$; $|z_1| = 2\sqrt{2}$; $\left.\begin{matrix} \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$ (2π), donc $z_1 = 2\sqrt{2}$ cis $\left(\frac{\pi}{4}\right)$
- Soit $z_2 = -2\sqrt{3} + 6i$; $|z_2| = 4\sqrt{3}$; $\left.\begin{matrix} \cos\theta_2 = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \theta_2 = \frac{2\pi}{3}$ (2π), donc $z_2 = 4\sqrt{3}$ cis $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
- $$z = \frac{\left(2\sqrt{2} \text{ cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^3}{\left(4\sqrt{3} \text{ cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2} = \frac{16\sqrt{2} \text{ cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{48 \text{ cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cis}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cis}\left(-\frac{7\pi}{12}\right)}$$
- $$z^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cis}\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)^4 = \frac{4}{81} \text{ cis}\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{4}{81} \text{ cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{81}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = \boxed{\frac{2}{81} - \frac{2\sqrt{3}}{81} i}$$

II. 1) $\left(\sqrt{2}x^3 - \frac{1}{2x}\right)^{13} = \left(\sqrt{2}x^3 + \left(-\frac{1}{2x}\right)\right)^{13} = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k \left(\sqrt{2}x^3\right)^k \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)^{13-k}$

$$= \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k \cdot \sqrt{2}^k x^{3k} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{13-k} x^{k-13} = \sum_{k=0}^{13} C_{13}^k \cdot \sqrt{2}^k \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{13-k} x^{4k-13}$$

Le terme en x^{12} est obtenu si $4k - 13 = 12 \Leftrightarrow x = \frac{25}{4}$, **impossible**, car k doit être entier.

Il n'y a donc pas de terme en x^{12}.

Le terme en x^{11} est obtenu si $4k - 13 = 11 \Leftrightarrow x = 6$

Terme en x^{11} : $C_{13}^8 \cdot \sqrt{2}^6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^7 x^{11} = \dfrac{13!}{7! \cdot 6!} \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{128}\right) x^{11} = \boxed{-\dfrac{429}{4}x^{11}}$

2) Nombre de façons d'organiser la journée :

a) $6! = \boxed{720}$ façons (permutations des 6 cours)

b) $4 \cdot 4! = \boxed{96}$ (4 poss. pour le groupe maths I et maths II, puis 4 places pour les 4 autres cours)

3) Nombre de mains possibles : $C_{24}^4 = 10\,626$

a) Nombre de mains avec exactement deux rois : $C_4^2 \cdot C_{20}^2 = 1140$
$p(\text{"ex 2 rois"}) = \frac{1140}{10\,626} = \boxed{\frac{190}{1771}} \approx 0{,}107$ $(= 10{,}7\%)$

b) Nombre de mains avec exactement une carte de chaque couleur : $\left(C_6^1\right)^4 = 6^4 = 1296$
$p(\text{"ex 1 coul de chaque coul"}) = \frac{1296}{10\,626} = \boxed{\frac{216}{1771}} \approx 0{,}122$ $(= 12{,}2\%)$

c) Nombre de mains sans coeur : $C_{18}^4 = 3060$
$p(\text{"au moins 1 coeur"}) = 1 - \frac{3060}{10\,626} = \boxed{\frac{1261}{1771}} \approx 0{,}712$ $(= 71{,}2\%)$

III. 1) a) Le système d'équations $\begin{cases} mx+y+2z=2 \\ 2mx+y+3z=m \\ x+my+2mz=2 \end{cases}$ avec $m \in \mathbb{R}$ admet une solution unique

$\Leftrightarrow \Delta_m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 2m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 2m^2+3+4m^2-2-4m^2-3m^2 \neq 0 \Leftrightarrow 1-m^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow \boxed{m \neq -1 \text{ et } m \neq 1}$.

b) Si $m=-1$, le système s'écrit : $\begin{cases} -x+y+2z=2 & (1) \\ -2x+y+3z=-1 & (2) \\ x-y-2z=2 & (3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2z-2 \\ -2y-4z+4+y+3z=-1 \\ y+2z-2-y-2z=2 \text{ impossible} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2z-2 \\ -y-z=-5 \\ 0y+0z=4 \text{ impossible} \end{cases}$, donc $\boxed{S=\phi}$

Interprétation géométrique : les trois équations du système représentent trois plans de l'espace qui n'ont aucun point commun. (les plans représentés par les équations (1) et (3) sont strictement parallèles et le plan représenté par (2) est sécant aux deux autres plans).

c) Si $m=1$, le système s'écrit : $\begin{cases} x+y+2z=2 & (1) \\ 2x+y+3z=1 & (2) \\ x+y+2z=2 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-2z+2 \\ -2y-4z+4+y+3z=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-2z+2 \\ -y-z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-2z+2 \\ z=-y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y+2y-6+2 \\ z=-y+3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y-4 \\ z=-y+3 \end{cases}$, donc $\boxed{S=\{(k-4;k;-k+3)\,/k\in\mathbb{R}\}}$

Interprétation géométrique : les équations (1) et (3) représentent un même plan de l'espace qui coupe le plan représenté par (2) suivant la droite d d'équations paramétriques :

$\begin{cases} x=k-4 \\ y=k \\ z=-k+3 \end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$, passant par le point $A(-4;0;3)$ et de vecteur directeur : $\overrightarrow{u}(1;1;-1)$.

2) a) $A(-1;3;-2)\in\pi_1 \Leftrightarrow -3\cdot(-1)+2\cdot 3-(-2)=4 \Leftrightarrow 12=4$ faux, donc $A\notin\pi_1$

b) Le vecteur $\overrightarrow{n}(-3;2;-1)$ est un vecteur normal au plan π_1 et aussi un vecteur directeur de la droite d.

$M(x;y;z)\in d \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}/\ \overrightarrow{AM}=k\ \overrightarrow{n} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}/ \begin{cases} x+1=-3k \\ y-3=2k \\ z+2=-k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=-3k-1 \\ y=2k+3 \\ z=-k-2 \end{cases}, \text{ avec } k\in\mathbb{R}}$; ce sont des **équations paramétriques** de la droite d.

Système d'**équations cartésiennes** de d : $\boxed{\begin{cases} x-3z=5 \\ y+2z=-1 \end{cases}}$

c) Le vecteur $\overrightarrow{n}(-3;2;-1)$ normal au plan π_1 est aussi un vecteur normal du plan π_2.

$M(x;y;z)\in\pi_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\odot\overrightarrow{n}=0 \Leftrightarrow (x+1)\cdot(-3)+(y-3)\cdot 2+(z+2)\cdot(-1)=0$

$\Leftrightarrow -3x+2y-z=11$, c'est une **équation cartésienne de** π_2.