

**Examen de fin d'études secondaires 2013 - Section C - Mathématiques I**

**Corrigé**

I. 1)  $\underbrace{z^3 - 3z^2 + (9 - 5i)z - 2 + 10i}_{P(z)} = 0$

Soit  $z_0 = bi$  ( $b \in \mathbf{R}$ ) une solution imaginaire pure.

Alors:  $P(z_0) = 0 \Leftrightarrow (bi)^3 - 3(bi)^2 + (9 - 5i)bi - 2 + 10i = 0$

$\Leftrightarrow -b^3i + 3b^2 + 9bi + 5b - 2 + 10i = 0$

$\Leftrightarrow 3b^2 + 5b - 2 + (-b^3 + 9b + 10) \cdot i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b^2 + 5b - 2 = 0 & (1) \\ -b^3 + 9b + 10 = 0 & (2) \end{cases}$

(1):  $\Delta = 25 + 24 = 49$ ;  $b_1 = \frac{-5+7}{6} = \frac{1}{3}$ ;  $b_2 = \frac{-5-7}{6} = -2$

$b = -2$  dans (2):  $8 - 18 + 10 = 0$

Donc:  $z_0 = -2i$  est une solution imaginaire pure et  $P(z)$  est divisible par  $z + 2i$ .

Schéma de Horner:

	1	-3	9-5i	-2+10i
-2i		-2i	-4+6i	2-10i
	1	-3-2i	5+i	0

D'où:  $P(z) = (z + 2i) \cdot Q(z)$ , avec  $Q(z) = z^2 + (-3 - 2i)z + 5 + i$ .

Réolvons l'équation  $Q(z) = 0$ :

$\Delta = (-3 - 2i)^2 - 4(5 + i) = 9 + 12i - 4 - 20 - 4i = -15 + 8i$

Soit  $x + iy$  ( $x, y \in \mathbf{R}$ ) une racine carrée complexe de  $\Delta$ . On obtient le système suivant:

$\begin{cases} x^2 - y^2 = -15 & (1) \\ 2xy = 8 & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{225 + 64} = 17 & (3) \end{cases}$

(1) + (3):  $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$  ou  $x = -1$

(3) - (1):  $2y^2 = 32 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = 4$  ou  $y = -4$

D'après (2)  $x$  et  $y$  sont de même signe.

Donc: Les racines carrées de  $\Delta$  sont  $1 + 4i$  et  $-1 - 4i$ .

Ainsi: Les solutions de l'équation  $Q(z) = 0$  sont  $z_1 = \frac{3 + 2i + 1 + 4i}{2} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$

et  $z_2 = \frac{3 + 2i - 1 - 4i}{2} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$ .

Finalement:  $S = \{-2i; 2 + 3i; 1 - i\}$

$$2) a) z_1 = \frac{6i-4}{5-i} = \frac{(6i-4)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{30i-6-20-4i}{25+1} = \frac{-26+26i}{26} = -1+i$$

$$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ donc: } \varphi_1 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{D'où: } z_1 = \sqrt{2} \text{cis} \frac{3\pi}{4}$$

$$b) Z = \frac{z_1^6}{z_2} = \frac{\left(\sqrt{2} \text{cis} \frac{3\pi}{4}\right)^6}{2 \text{cis} \frac{\pi}{3}} = \frac{8 \text{cis} \frac{18\pi}{4}}{2 \text{cis} \frac{\pi}{3}} = 4 \text{cis} \left(\frac{9\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 4 \text{cis} \frac{25\pi}{6} = 4 \text{cis} \frac{\pi}{6}$$

$$c) \text{ Racines cubiques de } z_2: t_k = \sqrt[3]{2} \text{cis} \left(\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right), \text{ avec } k \in \{0;1;2\}$$

$$\text{Donc: } t_0 = \sqrt[3]{2} \text{cis} \frac{\pi}{9}, t_1 = \sqrt[3]{2} \text{cis} \frac{7\pi}{9} \text{ et } t_2 = \sqrt[3]{2} \text{cis} \frac{13\pi}{9}$$

$$\text{II. 1) } \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \\ m & -2 & m \end{vmatrix} = 2m + 4m - 6 + m + 16 + 3m = 10m + 10$$

$$\text{Or: } \det A = 0 \Leftrightarrow 10m = -10 \Leftrightarrow m = -1$$

1<sup>er</sup> cas:  $m \neq -1$ :

Comme  $\det A \neq 0$ , on a un système de Cramer.

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -3 & -2 & m \end{vmatrix} = -12 + 10 - 3 - 5m = -5m - 5$$

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{-5m-5}{10m+10} = \frac{-5(m+1)}{10(m+1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 5 & 4 \\ m & -3 & m \end{vmatrix} = 10m - 9 + 5m + 24 = 15m + 15$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{15m+15}{10m+10} = \frac{15(m+1)}{10(m+1)} = \frac{3}{2}$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ m & -2 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 5m + 20 - 9 = 5m + 5$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{5m+5}{10m+10} = \frac{5(m+1)}{10(m+1)} = \frac{1}{2}$$

Le système admet une solution unique:  $S = \left\{ \left( -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right) \right\}$

Interprétation géométrique:

Les équations du système sont celles de trois plans qui se coupent en un seul point.

2<sup>e</sup> cas:  $m = -1$ :

$$\text{Le système s'écrit: } \begin{cases} 2x + y - z = 0 & (1) \\ -3x + y + 4z = 5 & (2) \\ -x - 2y - z = -3 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 & (1) \\ 5y + 5z = 10 & (2) / 3 \cdot (1) + 2 \cdot (2) \\ -3y - 3z = -6 & (3) / (1) + 2 \cdot (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

$$\text{En posant } z = \alpha, \text{ avec } \alpha \in \mathbf{R}, \text{ on obtient: } \begin{cases} 2x = \alpha - 2 + \alpha \\ y = -\alpha + 2 \\ z = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = -\alpha + 2 \\ z = \alpha \end{cases}$$

Le système est simplement indéterminé:  $S = \{(\alpha - 1; -\alpha + 2; \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$

Interprétation géométrique:

Les équations du système sont celles de trois plans qui se coupent suivant la droite

passant par le point  $A(-1; 2; 0)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

2) a) Soient  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$  deux vecteurs directeurs (non colinéaires) du plan  $\pi$ .

Alors:  $M(x; y; z) \in \pi \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -3 & 1 \\ y-1 & 1 & -2 \\ z+3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(x-2) + 6(z+3) + (y-1) - (z+3) + 2(x-2) + 15(y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7(x-2) + 16(y-1) + 5(z+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x - 14 + 16y - 16 + 5z + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x + 16y + 5z - 15 = 0$$

b) Comme  $d \perp \pi$ , le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan  $\pi$  et aussi un

vecteur directeur de la droite  $d$ .

Alors:  $M(x; y; z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \quad (k \in \mathbf{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 7k \\ y = 1 + 16k \\ z = -3 + 5k \end{cases}$$

$$\text{III. 1) } \left(2x^3 - \frac{3}{x^2}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 (-1)^k C_9^k (2x^3)^{9-k} \left(\frac{3}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^9 (-1)^k \cdot 2^{9-k} \cdot 3^k \cdot x^{27-3k} \cdot x^{-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^9 (-1)^k \cdot 2^{9-k} \cdot 3^k \cdot x^{27-5k}$$

Or:  $27 - 5k = 12 \Leftrightarrow -5k = -15 \Leftrightarrow k = 3$

Donc: Terme en  $x^{12}$ :  $(-1)^3 \cdot C_9^3 \cdot 2^6 \cdot 3^3 \cdot x^{12} = -84 \cdot 64 \cdot 27 \cdot x^{12} = -145512x^{12}$

2) a)  $P(5 \text{ cartes de la même couleur}) = \frac{4 \cdot C_{13}^5 \cdot C_{39}^3}{C_{52}^8} = \frac{47047572}{752538150} \approx 0,0625$

b)  $P(\text{au moins 1 dame}) = 1 - P(\text{aucune dame}) = 1 - \frac{C_{48}^8}{C_{52}^8} = 1 - \frac{377348994}{752538150} \approx 0,4986$

3) a) Nombre de tirages:  $B_5^3 + B_6^3 + B_7^3 = 5^3 + 6^3 + 7^3 = 684$

b) Nombre de tirages:  $3! \cdot A_5^1 \cdot A_6^1 \cdot A_7^1 = 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 1260$

c)  $P(2^{\circ} \text{ boule rouge}) = \frac{A_5^2 + A_6^1 \cdot A_5^1 + A_7^1 \cdot A_5^1}{A_{18}^2} = \frac{85}{306} = \frac{5}{18} \approx 0,2778$