1.

Corrigé

Question I

1) $P(z) = \alpha z^2 + \beta z + 15 - 3i$

a) $P(3i) = 0 \iff -9\alpha + 3\beta i + 15 - 3i = 0 \quad | \cdot \frac{1}{3}$

$\iff \boxed{-3\alpha + \beta i + 5 - i = 0 \quad (1)}$

$P(-3) = 3 - 9i \iff 9\alpha - 3\beta + 15 - 3i = 3 - 9i$

$\iff 9\alpha - 3\beta + 12 + 6i = 0 \quad | \cdot \frac{1}{3}$

$\iff \boxed{3\alpha - \beta + 4 + 2i = 0 \quad (2)}$

4

$(1) + (2) : \ (i-1)\beta + 9 + i = 0$

$\beta = \frac{9+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$

$\beta = \frac{9 + 9i + i - 1}{2}$

$\boxed{\beta = 4 + 5i}$

dans (2) : $3\alpha - 4 - 5i + 4 + 2i = 0$

$3\alpha = 3i$

$\boxed{\alpha = i}$

D'où, $P(z) = iz^2 + (4+5i)z + 15 - 3i$

b)

$P(z)$	i	$4+5i$	$15-3i$
$3i$		-3	$-15+3i$
	i	$1+5i$	"

2

$P(z) = (z - 3i)(iz + 1 + 5i)$

$= (z - 3i)\, i \cdot (z - i + 5)$

Ainsi la 2^e racine est égal à $\boxed{i - 5}$.

2) $Z_1 = \frac{2z - i}{\bar{z} + 2i} \quad (z \neq 2i) \quad \{$ Notons $z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$

$= \frac{2x + 2yi - i}{x - yi + 2i}$

$= \frac{2x + (2y-1)i}{x + (2-y)i} \cdot \frac{x - (2-y)i}{x - (2-y)i}$

3

$= \frac{2x^2 - 2x(2-y)i + (2y-1)\cdot x \cdot i + (2y-1)(2-y)}{x^2 + (2-y)^2}$

$= \frac{2x^2 + (2y-1)(2-y) + [-2x(2-y) + x(2y-1)]i}{x^2 + (2-y)^2}$

$Z_1 \in \mathbb{R} \iff \underline{-4x} + 2xy + 2xy \underline{-x} = 0 \quad$ avec $z \neq 2i$

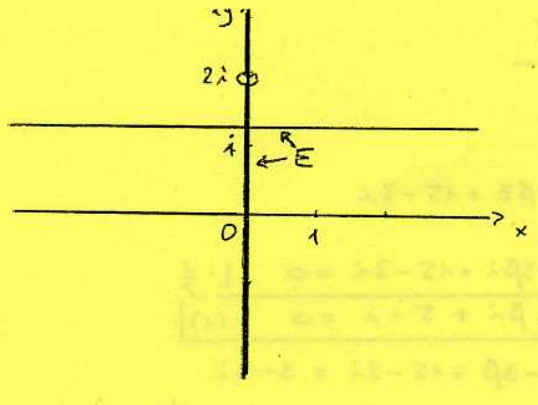
$\iff -5x + 4xy = 0$

$\iff x \cdot (-5 + 4y) = 0$

1

$\iff x = 0$ ou $y = \frac{5}{4}$ (éq. de 2 droites)

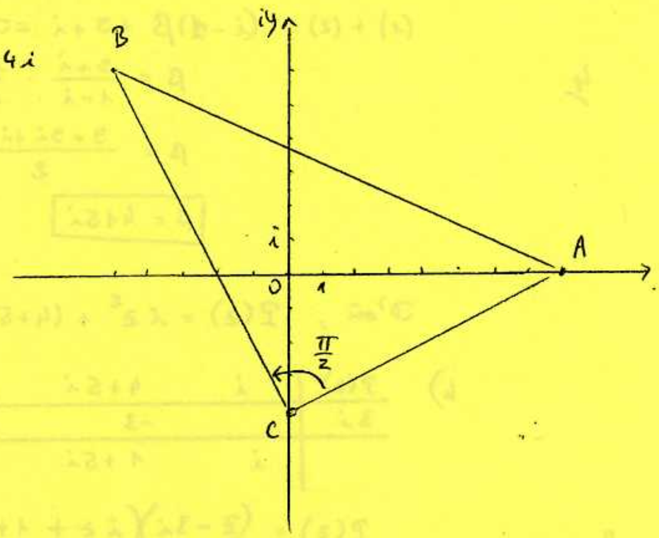
2.)



1

Finalement E est la réunion de 2 droites privée du pt. d'affixe $z=2i$

3) $z_A = 8$, $z_B = -5+6i$, $z_C = -4i$



b) $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{-5+6i+4i}{8+4i}$

$= \dfrac{-5+10i}{8+4i}$

$= \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{-1+2i}{2+i} \cdot \dfrac{2-i}{2-i}$

3 $= \dfrac{5}{4} \, \dfrac{-2+i+4i+2}{5}$

$= \dfrac{5}{4} i$

$= \dfrac{5}{4} \operatorname{cis} \dfrac{\pi}{2}$

Comme $\arg \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{\pi}{2} = \widehat{\overline{CA}\ \overline{CB}}$, on conclut que le triangle ABC est rectangle en C.

c) $z_D = \left(\operatorname{cis}\dfrac{-\pi}{3} \cdot z_A\right) \cdot \dfrac{-3}{2}$

1 $= \left(8 \cdot \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right) \cdot \dfrac{-3}{2}$

$\boxed{z_D = -6 + 6\sqrt{3}\, i}$

3.1 **Question II**

1) $x = -\sqrt{-\frac{1}{2}y^2 + 2y + 6}$

$x^2 = -\frac{1}{2}y^2 + 2y + 6$

$2x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$

$2x^2 + y^2 - 2\cdot y \cdot 2 + 4 = 12 + 4$

$2x^2 + (y-2)^2 = 16$

$\frac{x^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

(éq. d'une ellipse de centre $\Omega\binom{0}{2}$ d'axe focal Oy)

Cond: 1) $\boxed{x \leq 0}$

2) $-\frac{1}{2}y^2 + 2y + 6 \geq 0 \quad |\cdot(-2)$

$y^2 - 4y - 12 \leq 0$

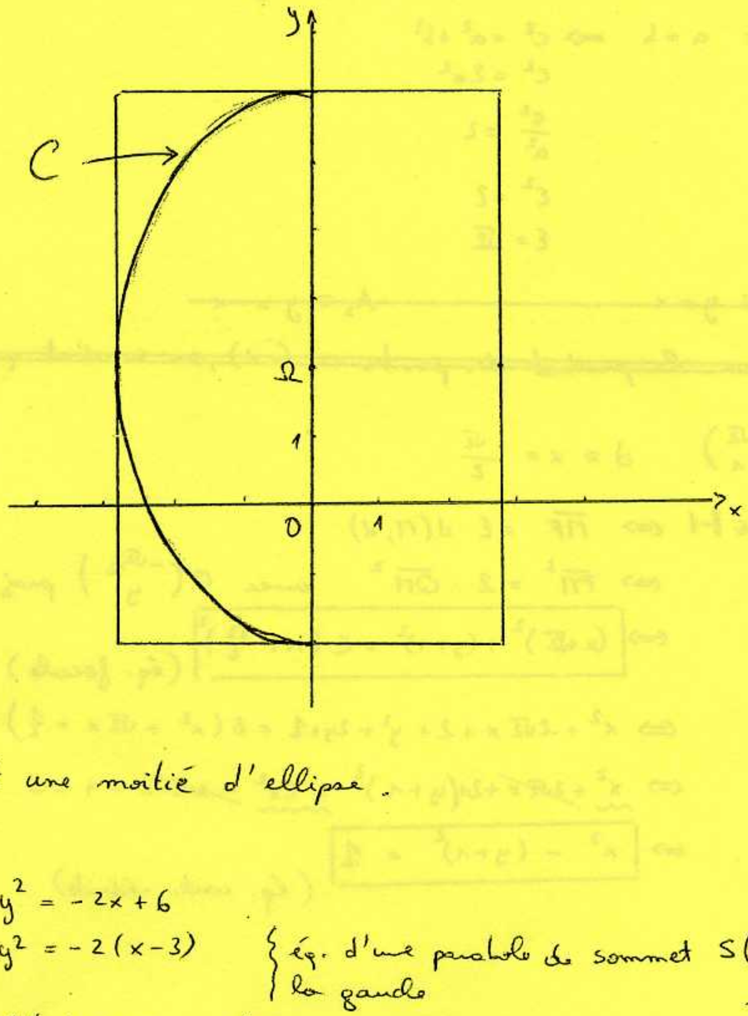
$\Delta = 16 - 4\cdot(-12)$
$= 16 + 48$
$= 64$

$\begin{cases} y_1 = \frac{4+8}{2} = 6 \\ y_2 = \frac{4-8}{2} = -2 \end{cases}$

$\boxed{y \in [-2, 6]}$

$\begin{cases} a = 4 \\ b = 2\sqrt{2} \end{cases}$

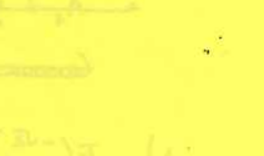
5



$\mathcal{C}$ est une moitié d'ellipse.

2) $\Gamma \equiv y^2 = -2x + 6$

$y^2 = -2(x-3)$ $\Big\{$ éq. d'une parabole de sommet $S\binom{3}{0}$ orientée vers la gauche



Comme $t \parallel d \equiv y = x$, notons

$t \equiv y = x + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

Résolvons le système suivant:

4

$\begin{cases} y = x + \lambda & (1) \\ y^2 = -2x + 6 & (2) \end{cases}$

4.1

(1) ds. (2) : $(x+d)^2 = -2x+6$

$x^2 + 2dx + d^2 + 2x - 6 = 0$

$x^2 + (2d+2)x + (d^2-6) = 0$

sol. double $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$\Leftrightarrow (2d+2)^2 - 4\cdot 1 \cdot (d^2-6) = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{4d^2} + 2\cdot 2d\cdot 2 + 4 \cancel{- 4d^2} + 24 = 0$

$\Leftrightarrow 8d = -28$

$\Leftrightarrow d = \frac{-7}{2}$

Finalement, la tangente cherchée est $\boxed{t \equiv y = x - \frac{7}{2}}$

3) a) ~~Raisonnons avec une hyperbole $H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ centrée à l'origine.~~

• On a : $a = b \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 2a^2$

$\frac{c^2}{a^2} = 2$

2

$\varepsilon^2 = 2$

$\varepsilon = \sqrt{2}$

~~• $A_1 \equiv y = x$ $A_2 \equiv y = -x$~~

~~Comme le produit des pentes est (−1), on conclut que $A_1 \perp A_2$.~~

b) $F\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$ $d \equiv x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$M\binom{x}{y} \in H \Leftrightarrow \overline{MF} = \varepsilon\, d(M,d)$

$\Leftrightarrow \overline{FM}^2 = 2\cdot\overline{QM}^2$ avec $Q\begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\y\end{pmatrix}$ proj. orth. de M sur d

$\Leftrightarrow \boxed{(x+\sqrt{2})^2 + (y+1)^2 = 2\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$ (ép. focale)

3

$\Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 + 2y + 1 = 2\left(x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x^2 + \cancel{2\sqrt{2}x} + 2 + (y+1)^2 - 2x^2 - \cancel{2\sqrt{2}x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x^2 - (y+1)^2 = 1}$ (ép. cart. réduite)

5-1 Question III

1) $15 \times$ "30"
$9 \times$ "50"
$1 \times$ "70"

25 canards : on choisit 3 (sans remise, ordre ne joue pas de rôle)

$X \in \{ 90, 110, 130, 150, 170 \}$

$90 = 3\cdot 30$; $110 = 2\cdot 30 + 1\cdot 50$; $130 = 2\cdot 30 + 70$ ou $1\cdot 30 + 2\cdot 50$; $150 = 30+50+70$ ou $3\cdot 50$; $170 = 2\cdot 50 + 70$

$$P(X=90) = \frac{C_{15}^3}{C_{25}^3} = \frac{455}{2300} = \frac{91}{460} \simeq 0{,}1978$$

$$P(X=110) = \frac{C_{15}^2 C_9^1}{C_{25}^3} = \frac{945}{2300} = \frac{189}{460} \simeq 0{,}0002$$

6 $$P(X=130) = \frac{C_{15}^2 C_1^1 + C_{15}^1 C_9^2}{C_{25}^3} = \frac{645}{2300} = \frac{129}{460} \simeq 0{,}2804$$

$$P(X=150) = \frac{C_{15}^1 C_9^1 C_1^1 + C_9^3}{C_{25}^3} = \frac{219}{2300} \simeq 0{,}0952$$

$$P(X=170) = \frac{C_9^2 C_1^1}{C_{25}^3} = \frac{36}{2300} = \frac{9}{575} \simeq 0{,}0157$$

Vérif : $\sum_k (X=k) = 1$

2) Placer A, B, C, D et E dans 5 cases numérotées $\underset{1}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{3}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{5}{\_}$

1 a) $P_5 = 5! = 120$ trajets

b) _ _ _ A _

1 $P_4 = 4! = 24$ trajets

c) _ D E _ _

5·4 possibilités pour placer D et E

2 Les 3 cases restantes peuvent être occupées dans l'ordre ABC ou ACB. Ainsi, il y a en tout :

$5\cdot 4 \cdot 2 = 40$ trajets

6. |

3) 8 % défectueux, choisir 12 objets
Noter X le nb. d'objets avec défaut.

a) - Choisir un objet : épreuve de Bernoulli
objet défectueux : " succès " avec probabilité $p = 0,08$
objet non défectueux : " échec " ———————— $q = 0,92$

2 · Répéter 12 fois cette épreuve : schéma de Bernoulli
· X suit une loi binômiale de paramètres $n = 12$, $p = 0,08$ et $q = 0,92$

$$P(X = k) = C_{12}^{k} \cdot 0,08^{k} \cdot 0,92^{12-k}$$

1 b) $P(X = 2) = C_{12}^{2} \cdot 0,08^{2} \cdot 0,92^{10} \cong 0,1835$

c) $P(X = 0 \text{ ou } X = 1 \text{ ou } X = 2)$

2 $= 0,92^{12} + C_{12}^{1} \cdot 0,08 \cdot 0,92^{11} + C_{12}^{2} \cdot 0,08 \cdot 0,92^{10}$

$\cong 0,3677 + 0,3837 + 0,1835$

$\cong 0,9348$

Question IV

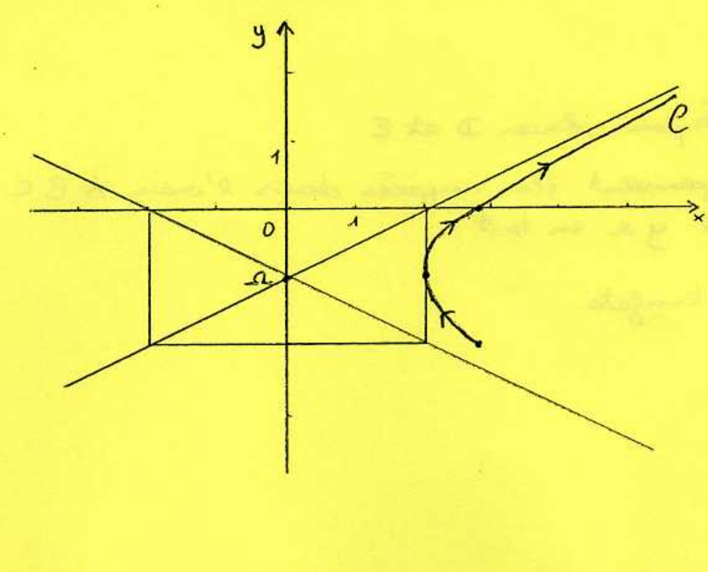
1. $C \equiv \begin{cases} x = \dfrac{2}{\cos t} \\ y = \tan t - 1 \end{cases} \quad t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\cos t} \\ y + 1 = \tan t \end{cases}$

Comme : $\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos^2 t} - \tan^2 t = 1$

On a : $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - (y+1)^2 = 1$

$\boxed{\dfrac{x^2}{4} - (y+1)^2 = 1}$ ég. d'une hyperbole de centre $\Omega\binom{0}{-1}$ $\Big\}$ $\begin{matrix} a = 2 \\ b = 1 \end{matrix}$



t	$M(t)$
$-\frac{\pi}{4}$	$(2\sqrt{2}, -2)$
0	$(2 ; -1)$

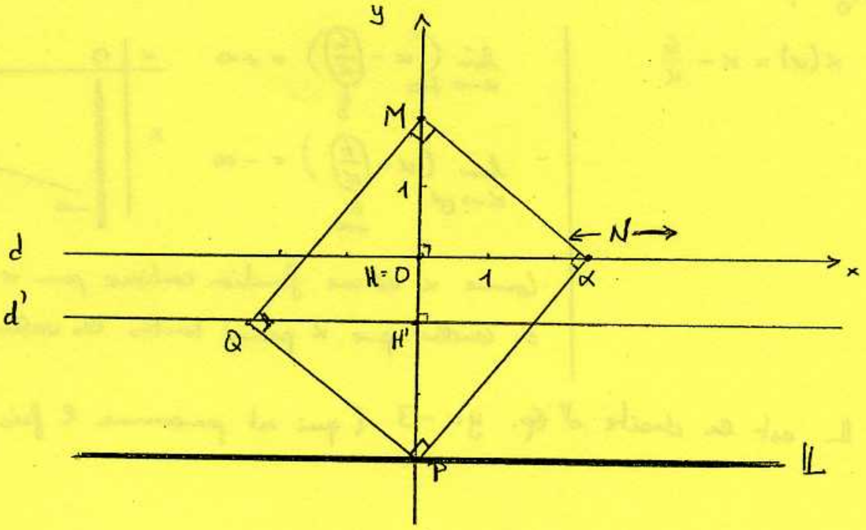
$\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} x(t) = \lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{2}{\underset{\searrow 0^+}{\cos t}} = +\infty$

$\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} y(t) = \lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \underset{\searrow +\infty}{\tan t} - 1 = +\infty$

Finalement : C est une partie d'hyperbole.

7.

2. a) Soit un RON tel que l'indique la figure :



On a : $d \equiv y = 0$ | $\overline{MH'} = 3\,\overline{MH}$ et H fixé. On choisit $M\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$.

$d' \equiv y = -1$ | Ainsi : $H\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et $H'\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

$N\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} \in d$ avec $\underset{(\text{paramètre})}{\alpha \neq 0}$, car $N \neq H$ (Si $N = H$, alors il n'est pas possible de construire le rectangle MNPQ.)

[b) Comme on a une symétrie p.r. à l'axe des y, on étudie le cas où $\alpha > 0$ et on complètera L par symétrie axiale.]

c) Equation de (MQ) :

$X\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (MQ) \iff \overrightarrow{MX} \perp \overrightarrow{MN}$

$\iff \overrightarrow{MX}\begin{pmatrix}x\\y-2\end{pmatrix} \odot \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}\alpha\\-2\end{pmatrix} = 0$

$\iff \alpha x - 2(y-2) = 0$

$\iff \alpha x - 2y + 4 = 0$

On a $Q\begin{pmatrix}x\\-1\end{pmatrix}$, d'où $\alpha x + 2 + 4 = 0$

$x = \dfrac{-6}{\alpha}$ avec $\alpha \neq 0$

$Q\begin{pmatrix}-6/\alpha\\-1\end{pmatrix}$

d) MNPQ est un rectangle $\iff \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ $\Big\}\, P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases}\alpha = x + \dfrac{6}{\alpha}\\ -2 = y + 1\end{cases}$

$\iff \begin{cases}x = \alpha - \dfrac{6}{\alpha}\\ y = -3\end{cases}$ ég. paramétriques du lieu L ($\alpha \in \mathbb{R}_0$)

e) On a une ég. sans paramètre, c'est donc l'ég. cartésienne du lieu :

$y = -3$

8.

Pour le lieu proprement dit, regardons les valeurs prises par x si $\alpha \in \mathbb{R}_0$.

$$x(\alpha) = \alpha - \frac{6}{\alpha}$$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \Big(\alpha - \underbrace{\Big(\frac{6}{\alpha}\Big)}_{0}\Big) = +\infty$$

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \Big(\alpha - \underbrace{\Big(\frac{6}{\alpha}\Big)}_{+\infty}\Big) = -\infty$$

α	0		$+\infty$
x	$\|\|$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Comme x est une fonction continue pour $\alpha \in]0,+\infty[$, on conclut que x prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$.

Finalement $\mathbb{L}$ est la droite d'ép. $y = -3$ (qui est parcourue 2 fois).