Corrigé de l'épreuve en mathématiques I / Examen 2016

Question I

1) $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} i$

a) $z_1 = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$

$z_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \frac{1}{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}}{\frac{1}{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{cis} \frac{11\pi}{12}$$

$$Z = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{16} = 2^{16} \cdot \operatorname{cis}\left(\cancel{16}^{\,4} \cdot \frac{11\pi}{\cancel{12}_{\,3}}\right) = 2^{16} \cdot \operatorname{cis} \frac{44\pi}{3} = 65536 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$$

car $\frac{44\pi}{3} - 7 \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

b) $Z = 65536\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -32768 + 32768\sqrt{3}\, i$

2) $P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 4 + 8i \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

a) $P(-2i) = 0 \Leftrightarrow 8i - 4\alpha - 2\beta i - 4 + 8i = 0$

$\Leftrightarrow -4\alpha - 2\beta i - 4 + 16i = 0 \quad | : (-2)$

$\Leftrightarrow 2\alpha + \beta i + 2 - 8i = 0 \quad (1)$

$P(-2) = 8 \Leftrightarrow -8 + 4\alpha - 2\beta - 4 + 8i = 8$

$\Leftrightarrow 4\alpha - 2\beta - 20 + 8i = 0 \quad | : 2$

$\Leftrightarrow 2\alpha - \beta - 10 + 4i = 0 \quad (2)$

$(1) - (2)$: $\beta(1+i) + 12 - 12i = 0 \Leftrightarrow \beta(1+i) = -12 + 12i$

$\Leftrightarrow \beta = \frac{-12(1-i)}{1+i} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)}$

$\Leftrightarrow \beta = \frac{\cancel{-12}^{\,-6}(\cancel{1} - 2i \cancel{-1})}{\cancel{1+1}_{\,1}}$

$\Leftrightarrow \beta = 12i$

Dans (2) : $2\alpha - 12i - 10 + 4i = 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 10 - 8i = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = 5 + 4i$

b) $P(z) = z^3 + (5+4i)z^2 + 12iz - 4 + 8i$

$-2i$ est une racine de $P(z)$:

	1	$5+4i$	$12i$	$-4+8i$
$-2i$		$-2i$	$4-10i$	$4-8i$
	1	$5+2i$	$4+2i$	0

$$P(z) = (z+2i)\underbrace{\left(z^2+(5+2i)z+4+2i\right)}_{Q(z)}$$

Déterminons les racines de $Q(z)$:

$$\Delta = (5+2i)^2 - 4\,(4+2i) = 25+20i-4-16-8i = 5+12i$$

$$\delta^2 = (x+yi)^2 = 5+12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = 5 & (1) \\ 2xy = 12 & (2) \\ x^2+y^2 = \sqrt{25+144} = 13 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(3)$: $2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$

$(1)-(3)$: $-2y^2 = -8 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = -2$

D'après (2), x et y ont même signe.

$\delta = 3+2i$ ou $\delta = -3-2i$

$$z = \frac{-5-2i+3+2i}{2} = -1 \quad \text{ou} \quad z = \frac{-5-2i-3-2i}{2} = \frac{-8-4i}{2} = -4-2i$$

Finalement : $S = \{-2i\ ;\ -1\ ;\ -4-2i\}$

3) a) $$w = \frac{2z-i}{3i-2z} = \frac{2x+2yi-i}{3i-2x-2yi} = \frac{2x+(2y-1)i}{-2x+(3-2y)i}\cdot\frac{-2x-(3-2y)i}{-2x-(3-2y)i} \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\left\{\frac{3i}{2}\right\}$$

$$= \frac{-4x^2-6xi+4xyi-4xyi+6y-4y^2+2xi-3+2y}{4x^2+(3-2y)^2}$$

$$= \frac{-4x^2-4y^2+8y-3}{4x^2+(3-2y)^2} - \frac{4x}{4x^2+(3-2y)^2}\,i$$

b) w est un imaginaire pur

$\Leftrightarrow -4x^2-4y^2+8y-3 = 0 \quad | :(-4)$

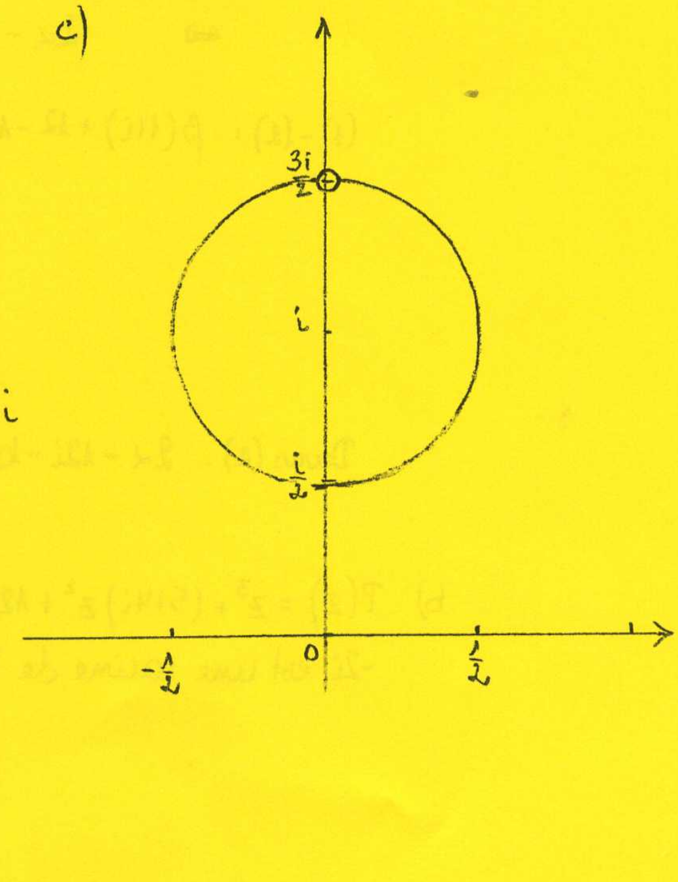
$\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+\frac{3}{4} = 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1-\frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = \frac{1}{4}$

A est le cercle de centre Ω d'affixe i et de rayon $\frac{1}{2}$ privé du point d'affixe $\frac{3i}{2}$.

c)



Question II

1) Comme $\mathcal{P}$ est une parabole de sommet $O(0;0)$, d'axe focal (Ox), comprenant le point $T(-4;4)$ d'abscisse négative, son équation est du type

$y^2 = -2px$

Equation de sa tangente au point T : $t \equiv y \cdot y_T = -px - px_T$

c-à-d : $t \equiv 4y = -px + 4p$

ou encore : $t \equiv y = -\frac{p}{4}x + p$

Comme l'ordonnée à l'origine de la tangente vaut 2, il faut bien que $p = 2$ et donc $\mathcal{P} \equiv y^2 = -4x$

2) $F(-1;2)$; $\delta \equiv y = 8$; $\varepsilon = \sqrt{3}$

a) $M(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow MF = \varepsilon \cdot d(M,\delta)$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{3} \cdot |y-8|$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 3(y-8)^2$ équation focale de Γ

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 - 4y + 4 = 3y^2 - 48y + 192$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 2y^2 + 44y - 188 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 2(y^2 - 22y + 121) + 242 - 188 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 2(y-11)^2 = -54 \quad |:(-54)$

$\Leftrightarrow -\frac{(x+1)^2}{54} + \frac{(y-11)^2}{27} = 1$

Soit le repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega(-1, 11)_{\mathcal{R}}$

Posons $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X-1 \\ y = Y+11 \end{cases}$

Dans $\mathcal{R}'$, on a $\Gamma \equiv -\frac{X^2}{54} + \frac{Y^2}{27} = 1$ équation réduite de Γ

b) Γ est une hyperbole d'axe focal (OY)

$a^2 = 27 \Rightarrow a = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$b^2 = 54 \Rightarrow b = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 27 + 54 = 81 \Rightarrow c = 9$

Dans $R'=(\Omega,\vec{i},\vec{j})$	Dans $R=(O,\vec{i},\vec{j})$
$F'(0;9)$; $F(0;-9)$	$F'(-1;20)$; $F(-1,2)$
$\delta' \equiv Y = \frac{a^2}{c} = 3$	$\delta' \equiv y-11=3 \Leftrightarrow y=14$
$\delta \equiv Y = -3$	$\delta \equiv y-11=-3 \Leftrightarrow y=8$
A.O : $Y=\frac{a}{b}X \Leftrightarrow Y=\frac{\sqrt{2}}{2}X$ et $Y=-\frac{\sqrt{2}}{2}X$	A.O : $y-11=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1) \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}+11$ et $y-11=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1) \Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}+11$

3) $C \equiv y=\frac{3}{4}\sqrt{-x^2+6x+7}-1$

$y=\frac{3}{4}\sqrt{-x^2+6x+7}-1 \Leftrightarrow y+1=\frac{3}{4}\sqrt{-x^2+6x+7}$ (E)

CE : 1) $-x^2+6x+7 \geq 0$

$\Delta=36+28=64$; $x_1=\frac{-6+8}{-2}=-1$ et $x_2=\frac{-6-8}{-2}=7$

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$-x^2+6x+7$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Il faut que $x\in[-1,7]$

2) $y+1\geq 0 \Leftrightarrow y\geq -1$

Elevons au carré les 2 membres de l'équation (E) :

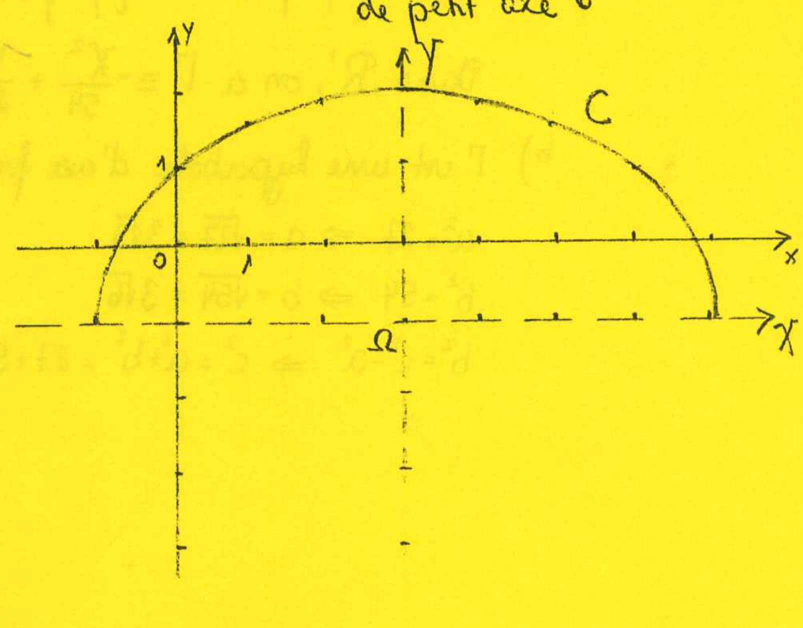
$$(y+1)^2=\frac{9}{16}(-x^2+6x+7) \Leftrightarrow (y+1)^2=-\frac{9}{16}(x^2-6x+9-9-7)$$
$$\Leftrightarrow (y+1)^2=-\frac{9}{16}(x-3)^2+9$$
$$\Leftrightarrow \frac{9}{16}(x-3)^2+(y+1)^2=9 \quad |:9$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

ellipse de centre $\Omega(3;-1)$ d'axe focal (Ox)
de grand axe 8
de petit axe 6

Soit le repère $R'=(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

Posons $\begin{cases} X=x-3 \\ Y=y+1 \end{cases}$

Dans R', on a $\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{9}=1$



(E) est donc l'équation d'une demi-ellipse.

Question III

1) $$\left(5x-\frac{1}{2x^2}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^{k}\,(5x)^{12-k}\,(-1)^k\cdot\left(\frac{1}{2x^2}\right)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{12} C_{12}^{k}\,(-1)^k\,5^{12-k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k x^{12-k-2k}$$

On cherche le terme en x^{-3} : $12-3k=-3 \Leftrightarrow 3k=15 \Leftrightarrow k=5$

Si $k=5$: $C_{12}^{5}\,(-1)^5\,5^7\left(\frac{1}{2}\right)^5 x^{-3} = -\frac{12!}{7!\,5!}\,\frac{5^7}{2^5}\,x^{-3} = -\frac{7734375}{4}\,x^{-3}$

2) Nombre de parfums possibles avec une essence : $C_6^1 = 6$
——— 2 essences : $C_6^2 = 15$
——— 3 ——— : $C_6^3 = 20$
——— 4 ——— : $C_6^4 = 15$
——— 5 ——— : $C_6^5 = 6$
——— 6 ——— : $C_6^6 = 1$

Nombre de parfums qu'on peut créer : $6+15+20+15+6+1 = 2^6-1 = 63$

3) Expérience aléatoire : tirer un penalty
Evénement élémentaire : le ballon rentre dans le but (succès) ou non (échec)
On a une épreuve de Bernoulli avec $p=0{,}45$ et $q=0{,}55$

a) Le joueur tire 4 penaltys. On a ainsi un schéma de Bernoulli.
La variable aléatoire X désigne le nombre de succès
$$P(X=x_i) = C_4^{x_i}\cdot 0{,}45^{x_i}\cdot 0{,}55^{4-x_i}$$
$$P(X\geq 1) = 1-P(X=0) = 1-C_4^0\cdot 0{,}45^0\cdot 0{,}55^4 = \frac{145\,359}{160\,000} \simeq 0{,}9085$$
$$\simeq 90{,}85\%$$

b) Le joueur tire n penaltys.
$$P(X\geq 1) = 1-P(X=0) = 1-C_n^0\,0{,}45^0\cdot 0{,}55^n = 1-0{,}55^n$$
$$P(X\geq 1) > 0{,}95 \Leftrightarrow 1-0{,}55^n > 0{,}95$$
$$\Leftrightarrow 0{,}55^n < 0{,}05$$
$$\Leftrightarrow n > \log_{0{,}55}(0{,}05)$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}55} \simeq 5{,}011$$

Le joueur doit tirer au moins 6 penaltys

4) Expérience aléatoire : on jette deux fois une paire de dés

On a 36 résultats possibles pour le 1er lancer et 36 résultats possibles pour le 2e lancer, donc $\#\Omega = 36^2 = 1296$

Tous les événements élémentaires sont équiprobables.

La variable aléatoire X désigne le gain du joueur ; elle peut prendre les valeurs +12, +5 ou −2.

a) $P(X=12) = \left(\frac{5}{36}\right)^2 = \frac{25}{1296}$

(Il y a 5 possibilités pour que la somme des points vaut 8 : $(6;2), (5;3), (4;4), (3;5), (2;6)$)

$P(X=-2) = \left(\frac{31}{36}\right)^2 = \frac{961}{1296}$

$P(X=5) = 1 - P(X=12) - P(X=-2) = 1 - \frac{25}{1296} - \frac{961}{1296} = \frac{310}{1296} = \frac{155}{648}$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	12	5	−2
$P(X=x_i)$	$\frac{25}{1296}$	$\frac{310}{1296}$	$\frac{961}{1296}$

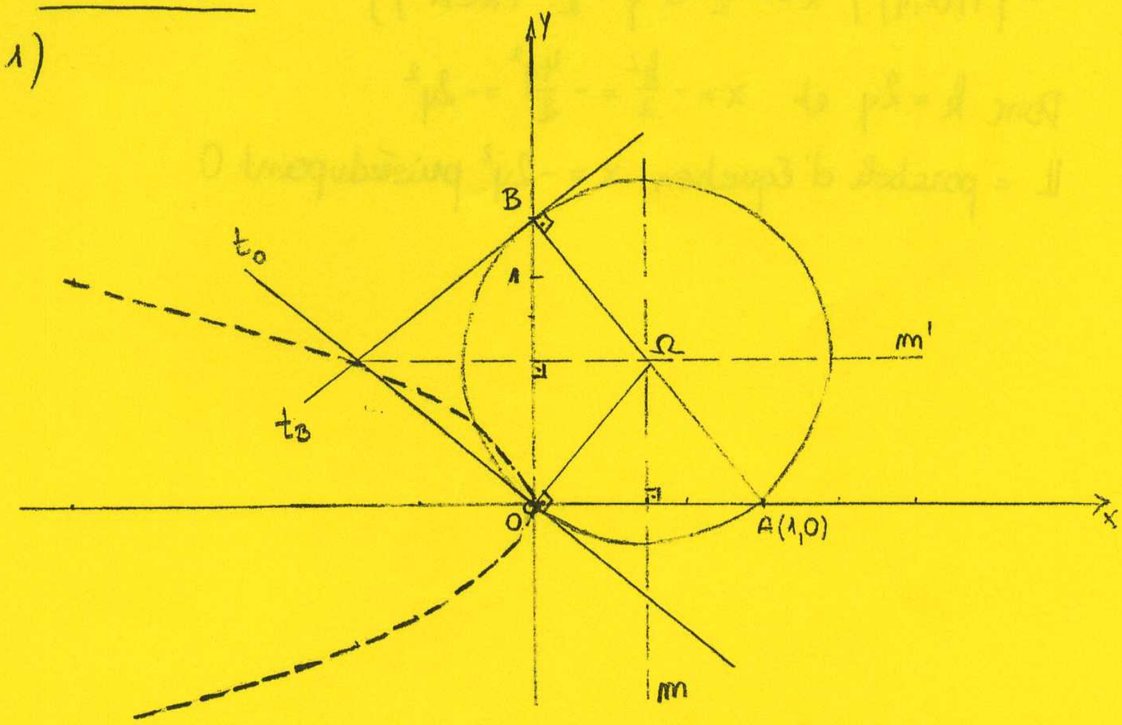
b) Espérance mathématique :

$E(X) = 12 \cdot \frac{25}{1296} + 5 \cdot \frac{310}{1296} - 2 \cdot \frac{961}{1296} = \frac{-72}{1296} = -\frac{1}{18} < 0$

Donc le jeu est légèrement défavorable au joueur.

Question IV

1)



A est un point fixe sur (Ox). Choisissons l'unité de longueur de sorte que $A(1;0)$

B est un point mobile sur (Oy), soit $B(0;k)$ $(k \in \mathbb{R}^*)$

Déterminons les coordonnées de Ω, centre du cercle circonscrit au $\triangle AOB$, càd. point d'intersection de 2 des médiatrices du $\triangle AOB$

$m \equiv x = \frac{1}{2}$ et $m' \equiv y = \frac{k}{2}$ $\quad \Rightarrow \Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{k}{2}\right)$

Equation de la tangente au cercle en O :

Comme $t_0 \perp (O\Omega)$, la pente de t_0 vaut $-\frac{1}{k}$

(pente de $(O\Omega)$: $\frac{\frac{k}{2}}{\frac{1}{2}} = k$)

$t_0 \equiv y = -\frac{1}{k}x \qquad (1)$

Equation de la tangente au cercle en B :

comme $t_B \perp (\Omega B)$, la pente de t_B vaut $\frac{1}{k}$

(pente de (ΩB) : $\frac{k - \frac{k}{2}}{0 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}k}{-\frac{1}{2}} = -k$)

$t_B \equiv y = \frac{1}{k}x + k \qquad (2)$

Résolvons le système formé par les équations (1) et (2) :

$-\frac{1}{k}x = \frac{1}{k}x + k \Leftrightarrow -\frac{2}{k}x = k \Leftrightarrow x = -\frac{k^2}{2}$

Dans (1) : $y = -\frac{1}{k} \cdot \left(-\frac{k^2}{2}\right) = \frac{k}{2}$

$\mathbb{L}$ = lieu des points d'intersection des tangentes t_O et t_B si $k \neq 0$

$= \left\{ M(x,y) \mid x = -\frac{k^2}{2} \text{ et } y = \frac{k}{2} \quad (k \in \mathbb{R}^*) \right\}$

Donc $k = 2y$ et $x = -\frac{k^2}{2} = -\frac{4y^2}{2} = -2y^2$

$\mathbb{L}$ = parabole d'équation $x = -2y^2$ privée du point O