Corrigé MathI, juin 2015

Question 1

A) 1) $P(-2i)=0 \Leftrightarrow 8i-4\alpha-2i\beta+18-74i=0$

$\Leftrightarrow -4\alpha-2i\beta=-18+66i \quad |:(-2)$

$\Leftrightarrow 2\alpha+i\beta=9-33i \quad (1)$

$P(1+i)=28-96i \Leftrightarrow 2i-2+2i\alpha+(1+i)\beta+18-74i=28-96i$

$\Leftrightarrow 2i\alpha+(1+i)\beta=12-24i \quad (2)$

$(1) \Leftrightarrow 2\alpha=9-33i-i\beta$

$\rightarrow (2): 9i+33+\beta+(1+i)\beta=12-24i \Leftrightarrow \beta(2+i)=-21-33i$

$\Leftrightarrow \beta=\frac{-21-33i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}$

$\Leftrightarrow \beta=\frac{-42+21i-66i-33}{4+1}$

$\Leftrightarrow \underline{\beta=-15-9i}$

D'où $2\alpha=\cancel{9}-33i+15i-\cancel{9} \Leftrightarrow \underline{\alpha=-9i}$

2) $P(z)=z^3-9iz^2-(15+9i)z+18-74i$

	1	$-9i$	$-15-9i$	$18-74i$
$-2i$		$-2i$	-22	$74i-18$
	1	$-11i$	$-37-9i$	0

$P(z)=0 \Leftrightarrow z=-2i$ ou $z^2-11iz-37-9i=0$

$\Delta=-121+148+36i=27+36i$

calcul de δ r.c.c. de Δ:

$|\Delta|=\sqrt{27^2+36^2}=45$

$\delta=\sqrt{\frac{45+27}{2}}+i\sqrt{\frac{45-27}{2}}=6+3i$

$z'=\frac{11i+6+3i}{2}=3+7i$

$z''=\frac{11i-6-3i}{2}=-3+4i$

$S=\{-2i;3+7i;-3+4i\}$

3) $A(-2i)$, $B(3+7i)$, $C(-3+4i)$

$AB=|3+9i|=\sqrt{9+81}=\sqrt{90}$

$AC=|-3+6i|=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$

$BC=|-6-3i|=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}$

$\Big\}$ $\underline{\Delta(ABC) \text{ isocèle}}$

$AC^2+BC^2=45+45=90=AB^2$ donc d'après la réciproque du théo. de Pythagore $\underline{\Delta(ABC) \text{ rect. en } C}$.

B) $(1-2i)^3 = 1^3 - 3\cdot 1^2\cdot(2i) + 3\cdot 1\cdot(2i)^2 - (2i)^3 = 1-6i-12+8i \overset{!}{=} -11+2i$

1re méthode

Résolvons l'équation $z^3 = -11+2i \Leftrightarrow \underbrace{z^3+11-2i}_{P(z)} = 0$

$P(1-2i)=0$ (vérifié) donc :

	1	0	0	11-2i
1-2i		1-2i	1-4i-4	-3-4i+6i-8
	1	1-2i	-3-4i	0

$P(z)=0 \Leftrightarrow z = 1-2i$ ou $z^2+(1-2i)z-3-4i=0$

$\Delta = -3-4i+12+16i = 9+12i$

calcul des r.c.c. de Δ :

$|\Delta| = \sqrt{9^2+12^2} = 15$

$\delta = \sqrt{\frac{15+9}{2}} + i\sqrt{\frac{15-9}{2}} = 2\sqrt{3}+i\sqrt{3}$

$z' = \frac{-1+2i+2\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}i + \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$

$z'' = \frac{-1+2i-2\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-2\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

racines cubiques de $-11+2i$: $z_1 = 1-2i$; $z_2 = \frac{2\sqrt{3}-1}{2} + \frac{2+\sqrt{3}}{2}i$;

$z_3 = \frac{-1-2\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

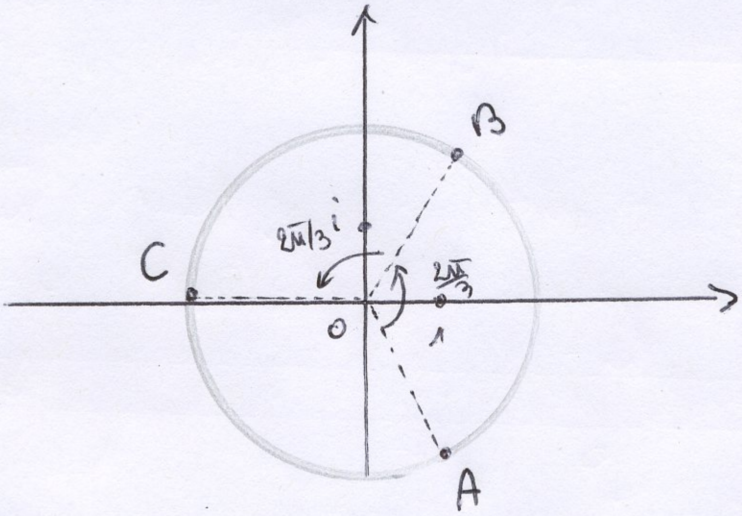
2e méthode (plus élégante !)

Les trois rac. cubiques de $-11+2i$ sont les affixes de 3 points A, B, C qui se trouvent sur le cercle de centre O et de rayon $|1-2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ et qui forment un triangle équilatéral. En posant $A(1-2i)$, $B(z_1)$, $C(z_2)$ on obtient B par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ de A autour de O et C par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ de B autour de O. Par conséquent :

$z_1 = (1-2i)\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} = (1-2i)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+i+\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}+2}{2}$

$z_2 = \left(\frac{2\sqrt{3}-1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-2\sqrt{3}+1}{4}+i\,\frac{6-\sqrt{3}}{4}+i\,\frac{-\sqrt{3}-2}{4}-\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{-2-4\sqrt{3}}{4}+i\,\frac{4-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-2\sqrt{3}}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}i$



Question 2

A) $\Omega = \{ (a,b,c) \mid a,b,c$ sont égaux à l'un des 6 symboles $\}$

$\# \Omega = 6^3 = 216$

$X : \Omega \longrightarrow \{19 ; 9 ; 0 ; -1\}$ (X = gain)

$p(X=19) = \frac{1}{216}$ (1 poss. pour obtenir $(\$,\$,\$)$)

$p(X=9) = \frac{5}{216}$ (5 ——— (a,a,a) avec $a \neq \$$)

$p(X=0) = \frac{6\cdot 5\cdot 3}{216} = \frac{90}{216}$ (6 poss. pour choisir le symbole répété 2 fois
5 —— pour lui associer un autre symbole
3 —— pour choisir l'ordre)

$p(X=-1) = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{216} = \frac{120}{216}$ (6 poss. pour le 1er symbole,
5 ——— 2e ———,
4 ——— 3e ———)

$E(X) = 19\cdot\frac{1}{216} + 9\cdot\frac{5}{216} + 0\cdot\frac{90}{216} + (-1)\cdot\frac{120}{216} = -\frac{56}{216} = -\frac{7}{27} \simeq -0{,}26$ €

$V(X) = \frac{1}{216}\cdot\left(19+\frac{7}{27}\right)^2 + \frac{5}{216}\left(9+\frac{7}{27}\right)^2 + \frac{90}{216}\left(\frac{7}{27}\right)^2 + \frac{120}{216}\left(-1+\frac{7}{27}\right)^2 = \frac{11\,765}{2\,916} \simeq 4{,}03$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \simeq 2{,}01$

B) $\left(2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8 = \sum_{i=0}^{8} C_8^i \left(2x^3\right)^i \left(-x^{-\frac{1}{2}}\right)^{8-i}$

$= \sum_{i=0}^{8} C_8^i\, 2^i\, x^{3i}\, (-1)^{8-i}\, x^{-4+\frac{i}{2}}$

$= \sum_{i=0}^{8} C_8^i\, 2^i\, (-1)^{8-i}\, x^{3{,}5i-4}$

$3{,}5i - 4 = 10 \Leftrightarrow i = 4$

terme en x^{10} : $C_8^4 \cdot 2^4 \cdot (-1)^4 \cdot x^{10} = \underline{1120\, x^{10}}$

C) 1) C_6^2 poss. pour choisir 2 emplacements pour les lettres

26 poss. pour la 1re lettre
25 ———— 2e ——
10 ———— le 1er chiffre
9 ———— 2e ——
8 ———— 3e ——
7 ———— 4e ——

p.ex

C_1	L_1	C_2	C_3	L_2	C_4
10 .	26 .	9 .	8 .	25 .	7

Nombre de codes : $C_6^2 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \underline{49'140'000}$

2) Même raisonnement sauf qu'on a aussi 26 poss. pour la 2e lettre, d'où :
Nombre de codes : $C_6^2 \cdot 26^2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \underline{51'105'600}$

Question 3

A) 1) $\Gamma \equiv x^2 + 3y^2 = 13 \equiv \dfrac{x^2}{13} + \dfrac{y^2}{\frac{13}{3}} = 1$

Γ = ellipse d'axe focal (Ox) et de centre O
avec $a = \sqrt{13}$, $b = \sqrt{\frac{13}{3}}$

Sommets : $S_1(\sqrt{13}, 0)$, $S_2(-\sqrt{13}, 0)$
$S_3\left(0, \sqrt{\frac{13}{3}}\right)$, $S_4\left(0, -\sqrt{\frac{13}{3}}\right)$

2) Soit t_M la tangente à Γ au point $M(x_0, y_0) \in \Gamma$, alors :
$t_M \equiv x_0 x + 3 y_0 y = 13$

$$\left.\begin{array}{l} A(5,-3) \in t_M \Leftrightarrow 5x_0 - 9y_0 = 13 \quad (1) \\ M(x_0,y_0) \in \Gamma \Leftrightarrow x_0^2 + 3y_0^2 = 13 \quad (2) \end{array}\right\} \text{système à résoudre}$$

$(1) \Leftrightarrow 5x_0 = 9y_0 + 13$
$\Leftrightarrow x_0 = \dfrac{9y_0 + 13}{5}$

$\rightarrow (2)$: $\dfrac{81y_0^2 + 234y_0 + 169}{25} + 3y_0^2 = 13 \quad |\cdot 25$

$\Leftrightarrow 81y_0^2 + 234y_0 + 169 + 75y_0^2 - 325 = 0$

$\Leftrightarrow 156\, y_0^2 + 234 y_0 - 156 = 0 \quad |:78$

$\Leftrightarrow 2y_0^2 + 3y_0 - 2 = 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$, $y_0' = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2}$, $y_0'' = \dfrac{-3-5}{4} = -2$

Si $y_0 = \frac{1}{2}$ alors $x_0 = \dfrac{\frac{9}{2} + 13}{5} = \dfrac{7}{2}$

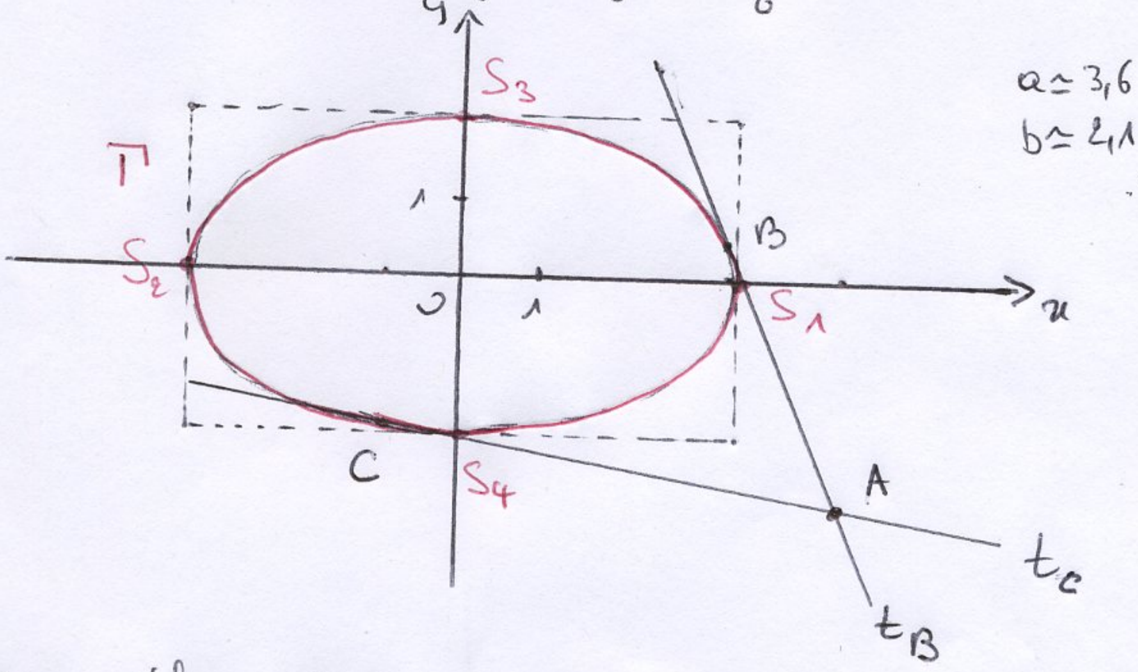
Si $y_0 = -2$ alors $x_0 = \dfrac{-18+13}{5} = -1$

Deux points de contacts possibles : $B\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $C(-1;-2)$

$t_B \equiv \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}y = 13 \equiv 7x + 3y = 26 \equiv y = -\frac{7}{3}x + \frac{26}{3}$

$t_C \equiv -x - 6y = 13 \equiv y = -\frac{1}{6}x - \frac{13}{6}$

3)



B) Γ est l'hyperbole de foyers A et B avec $2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$ d'après la définition bifocale.

$AB = 2c \Leftrightarrow 8 = 2c \Leftrightarrow c = 4$

$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7 \Leftrightarrow b = \sqrt{7}$

Centre : Ω = milieu $[AB]$ donc $\Omega(-2;-1)$

posons $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y + 1 \end{cases}$

Dans $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: $\Gamma \equiv \dfrac{Y^2}{9} - \dfrac{X^2}{7} = 1$

$A(0,4)$, $B(0;-4)$, axe focal (ΩY)

sommets: $S_1(0,3)$, $S_2(0,-3)$

$\varepsilon = \frac{4}{3}$

asymptotes : $Y = \frac{3}{\sqrt{7}}X$, $Y = -\frac{3}{\sqrt{7}}X$

Dans $(O,\vec{i},\vec{j})$: $\Gamma \equiv \frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{7} = 1$

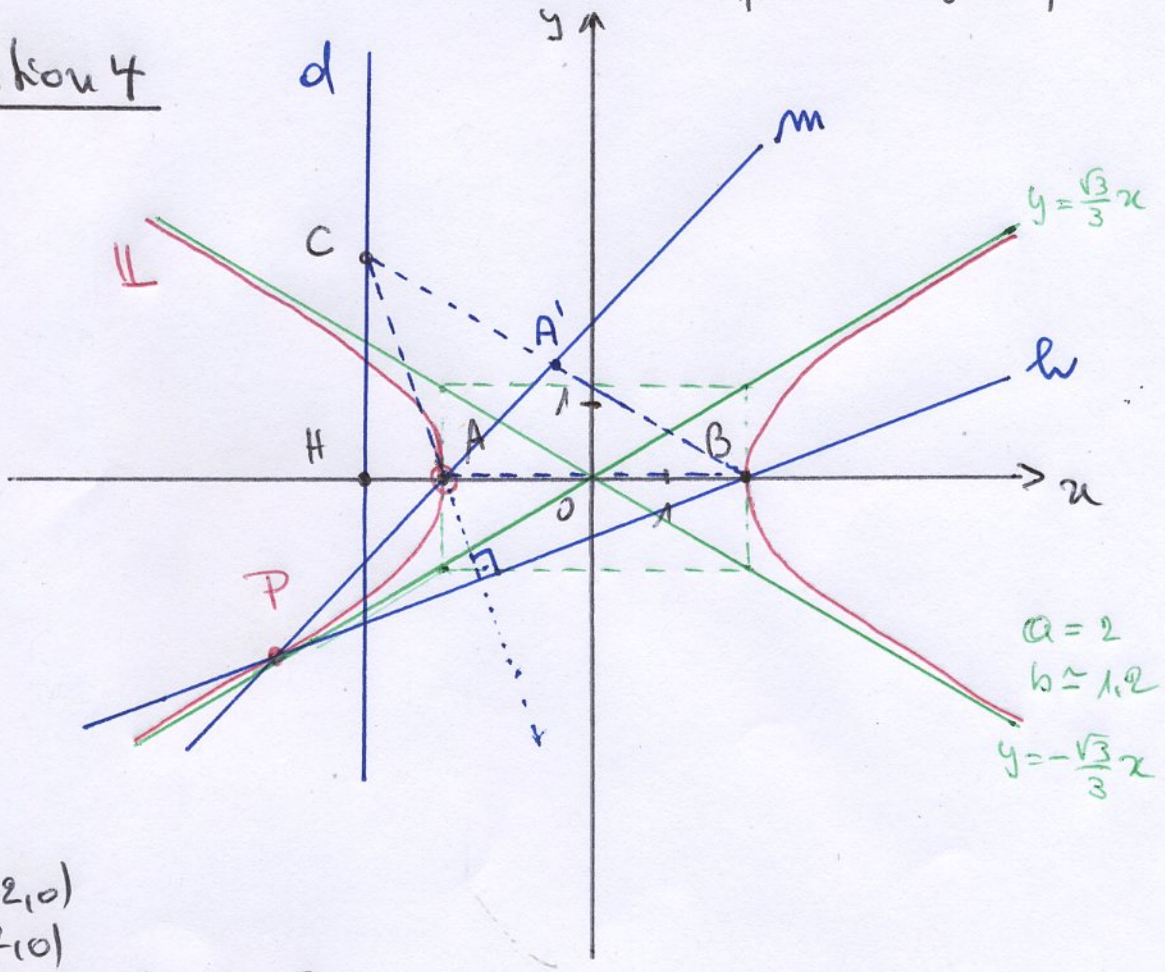
axe focal : $x = -2$

sommets: $S_1(-2,2)$, $S_2(-2,-4)$

asymptotes : $y+1 = \frac{3\sqrt{7}}{7}(x+2) \iff y = \frac{3\sqrt{7}}{7}x + \frac{6\sqrt{7}-7}{7}$

$y+1 = -\frac{3\sqrt{7}}{7}(x+2) \iff y = -\frac{3\sqrt{7}}{7}x - \frac{6\sqrt{7}+7}{7}$

Question 4



$A(-2,0)$

$B(2,0)$

$H(-3,0)$, $d \equiv x = -3$

$C(-3,t)$ avec $t \in \mathbb{R}$

$A' =$ milieu $[BC] \iff A'\left(-\frac{1}{2}, \frac{t}{2}\right)$

équation de m : $M(x,y) \in m \iff \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{t}{2} \end{pmatrix}$ colin.

$\iff (x+2)\frac{t}{2} - \frac{3}{2}y = 0 \quad |\cdot 2$

$\iff y = \frac{t}{3}x + \frac{2t}{3} \equiv m$

équation de h : $M(x,y) \in h \iff \vec{BM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} \perp \vec{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$

$$\iff \vec{BM} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\iff -x+2+ty=0$$

$$\iff ty = x-2 \equiv h$$

$\mathbb{L} = m \cap h$ d'où :

$$P(x,y) \in \mathbb{L} \iff \begin{cases} y = \frac{t}{3}x + \frac{2t}{3} & (1) \\ ty = x-2 & (2) \end{cases} \quad (\text{avec } t \in \mathbb{R})$$

Eliminons t :

1er cas : $y=0$

(2) : $0 = x-2 \iff x=2$

$\to (1)$: $0 = \frac{t}{3}\cdot 2 + \frac{2t}{3} \iff t=0 \iff C=H$

D'où $B(2,0) \in \mathbb{L}$

2e cas : $y \neq 0$

$(2) \iff t = \frac{x-2}{y}$

$\to (1)$: $y = \frac{x-2}{y}\cdot\frac{x}{3} + \frac{2x-4}{3y} \quad |\cdot 3y$

$$\iff 3y^2 = x^2 \cancel{-2x} + \cancel{2x} - 4$$

$$\iff x^2 - 3y^2 = 4 \quad |:4$$

$$\iff \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

équation de l'hyperbole Γ d'axe focal (Ox), de centre O

avec $a=2$, $b = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \iff c = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

sommets : $A(-2,0)$ et $B(2,0)$

comme $y \neq 0$ les sommets A et B sont à enlever, or d'après le 1er cas $B \in \mathbb{L}$ donc finalement :

$$\mathbb{L} = \Gamma \setminus \{A\}$$