Corrigé

I) 1) $z^4+(2i-5)z^2+50i=0$ **(*)**

En posant $t=z^2$ l'équation devient $t^2+(2i-5)t+50i=0$:

$\Delta=(2i-5)^2-200i=21-220i$, $|\Delta|=\sqrt{21^2-220^2}=221$ et une r.c.c. est donnée par $\delta=\sqrt{\dfrac{221+21}{2}}-i\sqrt{\dfrac{221-21}{2}}=11-10i$ et par conséquent :

$$t'=\frac{-2i+5+11-10i}{2}=8-6i \text{ et } t''=\frac{-2i+5-11+10i}{2}=-3+4i$$

D'où (*) $\Leftrightarrow z^2=t'$ ou $z^2=t''$,

et comme $|t'|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$ et $|t''|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$ il vient :

(*) $\Leftrightarrow z=\sqrt{\dfrac{10+8}{2}}-i\sqrt{\dfrac{10-8}{2}}=3-i$ ou $z=-3+i$ ou $z=\sqrt{\dfrac{5-3}{2}}+i\sqrt{\dfrac{5+3}{2}}=1+2i$ ou $z=-1-2i$

$S=\{3-i;-3+i;1+2i;-1-2i\}$

2) a) $A=B\Leftrightarrow z+i+1=3z+1\Leftrightarrow z=\dfrac{i}{2}$

$A=C\Leftrightarrow z+i+1=2z+i\Leftrightarrow z=1$

$B=C\Leftrightarrow 3z+1=2z+i\Leftrightarrow z=i-1$

Donc $\mathbb{E}=\mathbb{C}\setminus\left\{\dfrac{i}{2};1;i-1\right\}$

b) $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\dfrac{3z+1-z-i-1}{2z+i-z-i-1}=\dfrac{2z-i}{z-1}$, et en posant $z=x+yi$ avec $x,y\in\mathbb{R}$:

$$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{2x+2yi-i}{x+yi-1}=\frac{(2x+2yi-i)(x-1-yi)}{(x-1+yi)(x-1-yi)}$$

$$=\frac{2x^2-2x-2xyi+2xyi-2yi+2y^2-xi+i-y}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=\frac{2x^2-2x+2y^2-y}{(x-1)^2+y^2}+\frac{-2y-x+1}{(x-1)^2+y^2}i$$

donc $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow 2x^2-2x+2y^2-y=0\Leftrightarrow x^2-x+y^2-\dfrac{1}{2}y=0$

$$\Leftrightarrow x^2-2x\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+y^2-2y\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{5}{16}\quad (*)$$

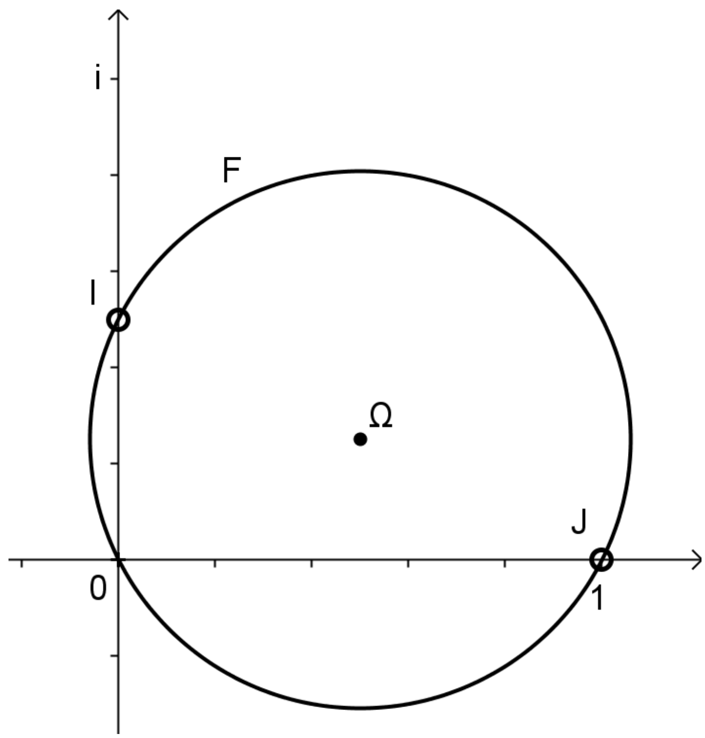
(*) est une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$

$z=\frac{i}{2} \Leftrightarrow x=0$ et $y=\frac{1}{2}$ et comme $\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$, $I\left(\frac{i}{2}\right)\in\mathcal{C}$

$z=1 \Leftrightarrow x=1$ et $y=0$ et comme $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$, $J(1)\in\mathcal{C}$

$z=i-1 \Leftrightarrow x=-1$ et $y=1$ et comme $\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{4}\right)^2\neq\frac{5}{16}$, $K(i-1)\notin\mathcal{C}$

Par conséquent $\boxed{\mathbb{F}=\mathcal{C}\setminus\{I,J\}}$



c) Si $P(z)\in\mathbb{F}$ alors les trois points A, B et C sont deux à deux différents (car $z\in\mathbb{E}$),

et $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \Delta(ABC)$ est rectangle en A

II) 1) $\left(2x-\frac{3}{4x^2}\right)^{21}=\sum_{i=0}^{21}C_{21}^{i}(2x)^{21-i}\left(-\frac{3}{4x^2}\right)^{i}=\sum_{i=0}^{21}C_{21}^{i}2^{21-i}\left(-\frac{3}{2^2}\right)^{i}x^{21-i-2i}$

$$=\sum_{i=0}^{21}C_{21}^{i}2^{21-3i}(-3)^{i}x^{21-3i}$$

or $21-3i=0 \Leftrightarrow i=7$ donc le terme constant vaut : $C_{21}^{7}2^{0}(-3)^{7}=-254\,304\,360$

2) Calculons d'abord la probabilité p d'obtenir deux boules de même couleur en réalisant cette expérience une fois : il y a $C_{16}^{2}=120$ tirages sans ordre et sans répétition de 2 boules parmi 16 et $C_{3}^{2}+C_{5}^{2}+C_{8}^{2}=41$ tirages de 2 boules de même couleur, donc $p=\frac{41}{120}$.

Considérons maintenant cette expérience comme une épreuve de Bernouilli avec :
Succès : « on obtient deux boules de même couleur », $p(S)=p=\frac{41}{120}$ et **E**chec : « on obtient deux boules de couleurs différentes », $p(E)=q=\frac{79}{120}$. En répétant cette expérience 10 fois et en notant X le nombre de « succès » obtenus, on a d'après la loi binomiale : $p(X=i)=C_{10}^{i}\left(\frac{41}{120}\right)^{i}\left(\frac{79}{120}\right)^{10-i}$ pour $i=0,1,\cdots 10$.

$$p(X\leq 8)=1-p(X>8)=1-p(X=9)-p(X=10)=1-10\left(\frac{41}{120}\right)^{9}\left(\frac{79}{120}\right)^{1}-\left(\frac{41}{120}\right)^{10}$$
$$\simeq 0,9996$$

3) $\Omega=\{\text{mains à 4 cartes}\}$, $\#\Omega=C_{32}^{4}=35\,960$

Soit $X:\Omega\to\mathbb{R}$ la v.a. définie pour tout $\omega\in\Omega$ par :

$$X(\omega)=\begin{cases}8 & \text{si } \omega \text{ contient 4 as}\\ 4 & \text{si } \omega \text{ contient 3 as}\\ 2 & \text{si } \omega \text{ contient 2 as}\\ 1 & \text{si } \omega \text{ contient 1 as}\\ 0 & \text{si } \omega \text{ ne contient aucun as mais la dame de coeur}\\ -1 & \text{si } \omega \text{ ne contient ni as ni la dame de coeur}\end{cases}$$

Pour $X(\omega)\geq 1$ on distingue les 4 as et les 28 autres, alors que pour $X(\omega)\leq 0$ il faut distinguer les 4 as, la dame de cœur et les 27 autres :

$$p(X=8)=\frac{C_{4}^{4}}{35\,960}=\frac{1}{35\,960} \qquad p(X=4)=\frac{C_{4}^{3}\cdot C_{28}^{1}}{35\,960}=\frac{112}{35\,960}$$

$$p(X=2)=\frac{C_{4}^{2}\cdot C_{28}^{2}}{35\,960}=\frac{2\,268}{35\,960} \qquad p(X=1)=\frac{C_{4}^{1}\cdot C_{28}^{3}}{35\,960}=\frac{13\,104}{35\,960}$$

$$p(X=0)=\frac{C_{1}^{1}\cdot C_{27}^{3}}{35\,960}=\frac{2\,925}{35\,960} \qquad p(X=-1)=\frac{C_{27}^{4}}{35\,960}=\frac{17\,550}{35\,960}$$

D'où : $E(X)=\frac{8\cdot 1}{35\,960}+\frac{4\cdot 112}{35\,960}+\frac{2\cdot 2\,268}{35\,960}+\frac{1\cdot 13\,104}{35\,960}+\frac{0\cdot 2\,925}{35\,960}+\frac{-1\cdot 17\,550}{35\,960}\simeq 0,02$

Comme $E(X) > 0$ le jeu est favorable au joueur qui peut espérer gagner à peu près 2 centimes par partie.

III) **1)** $\Gamma_1 \equiv 3x + 4\sqrt{y^2+4y+13} = 15 \Leftrightarrow 4\sqrt{y^2+4y+13} = 15-3x$ (*)

C.E. $15-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$ et $y^2+4y+13 \geq 0$, vrai $\forall y \in \mathbb{R}$ car $\Delta = -36 < 0$

$$(*) \Big| (\ )^2 \Leftrightarrow 16\left(y^2+4y+13\right) = (15-3x)^2$$

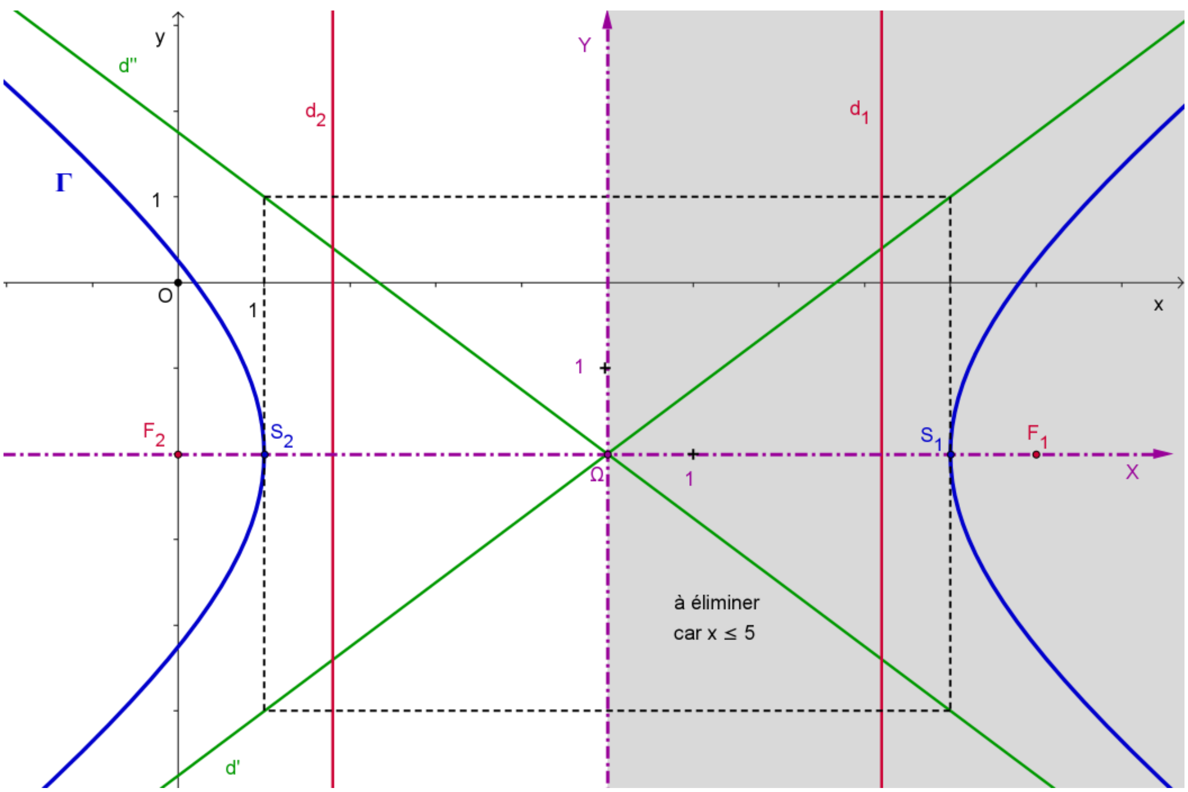
$$\Leftrightarrow 16\left(y^2+2y2+4-4+13\right) = (-3)^2 (x-5)^2$$

$$\Leftrightarrow 16(y+2)^2 + 16 \cdot 9 = 9(x-5)^2$$

posons $X = x-5;\quad Y = y+2;\quad \Omega(5;-2)$, alors dans le repère $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$ on a :

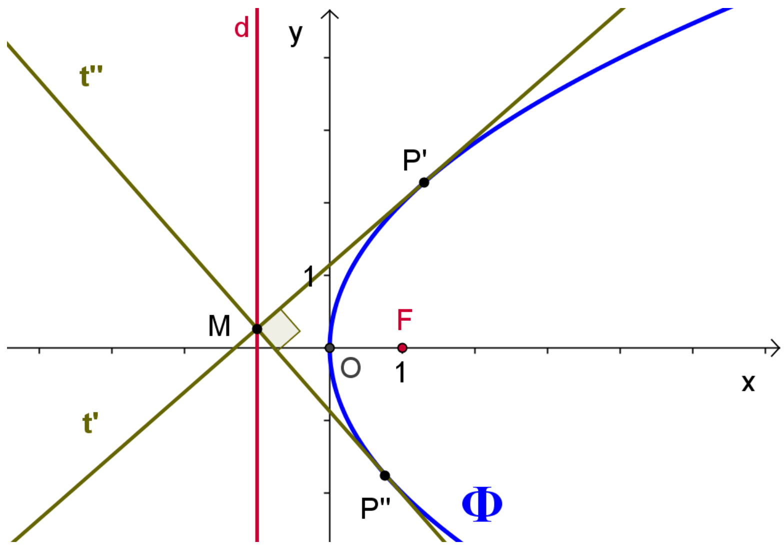
$(*) \Leftrightarrow 16Y^2 + 144 = 9X^2 \Leftrightarrow 9X^2 - 16Y^2 = 144 \Leftrightarrow \dfrac{X^2}{16} - \dfrac{Y^2}{9} = 1$ ce qui est l'équation d'une hyperbole d'axe focal (ΩX), $a^2 = 16 \Leftrightarrow a = 4$, $b^2 = 9 \Leftrightarrow b = 3$, $c^2 = 16+9 = 25 \Leftrightarrow c = 5$, d'excentricité $\varepsilon = \dfrac{5}{4}$, de sommets $S_1(4,0)$ et $S_2(-4,0)$, de foyers $F_1(5,0)$ et $F_2(-5,0)$, de directrices $d_1 \equiv X = \dfrac{16}{5}$ et $d_2 \equiv X = -\dfrac{16}{5}$ et d'A.O. $d' \equiv Y = \dfrac{3}{4}X$ et $d'' \equiv Y = -\dfrac{3}{4}X$.

De plus d'après les C.E. $x \leq 5 \Leftrightarrow x-5 \leq 0 \Leftrightarrow X \leq 0$, donc Γ est la demi hyperbole suivante :



2) **a)** $\Phi \equiv y^2 = 4x$, axe focal $m = (Ox)$, paramètre $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$, foyer $F(1;0)$ et directrice $d \equiv x = -1$.

La tangente t a pour équation $y_0 y = 2x + 2x_0 \Leftrightarrow y = \dfrac{2}{y_0}x + \dfrac{2x_0}{y_0}$ (1) puisque $y_0 \neq 0\ (P \neq O)$ et sa pente vaut donc $\dfrac{2}{y_0}$.



b) Soit $M(-1;m) \in d$ avec $m \in \mathbb{R}$, cherchons tous les points $P(x_0, y_0) \in \Phi$ tel que (PM) soit tangente à Φ :

$y_0^2 = 4x_0$ (1) et $y_0 m = -2 + 2x_0 \Leftrightarrow 2x_0 = y_0 m + 2 \Leftrightarrow 4x_0 = 2my_0 + 4$ (2),

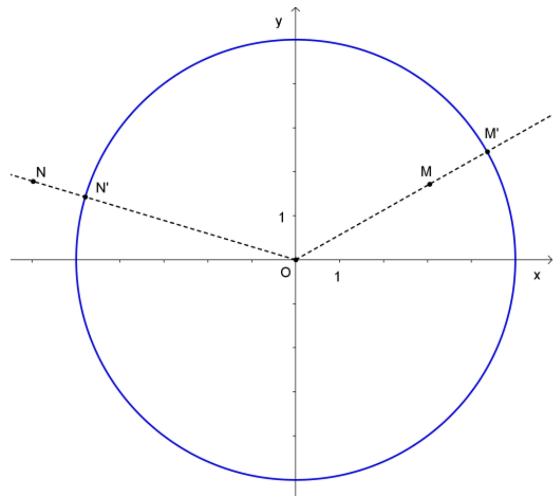
d'où $y_0^2 = 2my_0 + 4 \Leftrightarrow y_0^2 - 2my_0 - 4 = 0$, équation du second degré en y_0,

$\Delta = 4m^2 + 16 = 4(m^2 + 4) > 0$ donc on a deux solutions :

$y_0^{'} = \dfrac{2m + \sqrt{4(m^2+4)}}{2} = m + \sqrt{m^2+4}$ et $y_0^{''} = m - \sqrt{m^2+4}$ ce qui montre bien qu'il existe deux tangentes t' et t'' à Φ passant par M et qui ont pour pentes $\dfrac{2}{m + \sqrt{m^2+4}}$ et $\dfrac{2}{m - \sqrt{m^2+4}}$ respectivement d'après a).

Or $\dfrac{2}{m + \sqrt{m^2+4}} \cdot \dfrac{2}{m - \sqrt{m^2+4}} = \dfrac{4}{m^2 - (m^2+4)} = \dfrac{4}{-4} = -1$ donc $t' \perp t''$

IV) **1)** schéma :



Que $M(x;y)$ soit à l'intérieur ou à l'extérieur du disque, $M\mathcal{C} = MM'$ avec $M' \in \mathcal{C} \cap [OM)$.

Or $MM' = \begin{cases} OM' - OM & \text{si M à l'intérieur du disque} \\ OM - OM' & \text{si M à l'extérieur du disque} \end{cases}$, d'où $MM' = |OM' - OM|$ et

comme $OM' = 5$ et $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, on a bien $M\mathcal{C} = MM' = \left|5 - \sqrt{x^2 + y^2}\right|$.

2) $MA = M\mathcal{C} \Leftrightarrow MA^2 = MM'^2$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = \left(5 - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 25 - 10\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{x^2+y^2} = 6x + 16$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x^2+y^2} = 3x + 8 \quad \Big|(\ )^2 \quad (\text{C.E. } 3x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{8}{3})$$

$$\Leftrightarrow 25\left(x^2 + y^2\right) = 9x^2 + 48x + 64$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 48x \ + 25y^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow 16\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 25y^2 = 64 + 36$$

$$\Leftrightarrow 16\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 25y^2 = 100$$

posons $X = x - \frac{3}{2}$; $Y = y$; $\Omega\left(\frac{3}{2};0\right)$, alors dans le repère $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$ on a :

$16X^2+25Y^2=100 \Leftrightarrow \dfrac{X^2}{\frac{25}{4}}+\dfrac{Y^2}{4}=1$ ce qui est l'équation de l'ellipse d'axe focal (ΩX) avec $a=\dfrac{5}{2}$, $b=2$, $4=\dfrac{25}{4}-c^2 \Leftrightarrow c^2=\dfrac{9}{4} \Leftrightarrow c=\dfrac{3}{2}$, d'excentricité $\varepsilon=\dfrac{3}{5}$, de sommets $S_1\left(\dfrac{5}{2},0\right)$ et $S_2\left(-\dfrac{5}{2},0\right)$, $S_3(0,2)$ et $S_4(0,-2)$ de foyers $F\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ et $F'\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$, de directrices $d \equiv X=\dfrac{25}{6}$ et $d' \equiv X=-\dfrac{25}{6}$. De plus on constate que $A=F$ et $O=F'$, c'est-à-dire que O et A sont les deux foyers de l'ellipse.

Enfin $X \geq -\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x \geq -1\left(>-\dfrac{8}{3}\right)$ donc les C.E. sont bien vérifiées pour toute l'ellipse.