Corrigé

I) 1) $z' = \dfrac{z-4+i}{z-2i}$

pos : $z = x+yi \quad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (x,y) \neq (0,2)$

$$z' = \frac{x-4+(y+1)i}{x+(y-2)i} \cdot \frac{x-(y-2)i}{x-(y-2)i}$$

$$= \frac{x^2-4x+x(y+1)i-x(y-2)i+4(y-2)i+(y+1)(y-2)}{x^2+(y-2)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x+y^2-2y+y-2+(\cancel{xy}+x-\cancel{xy}+2x+4y-8)i}{x^2+(y-2)^2}$$

$$= \frac{x^2-4x+y^2-y-2+(3x+4y-8)i}{x^2+(y-2)^2}$$

$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \underbrace{3x+4y-8=0}_{\text{droite } \Delta}$ et $(x,y) \neq (0,2)$

$A(0,2) \in \Delta$, car $0+8-8 \overset{!}{=} 0$

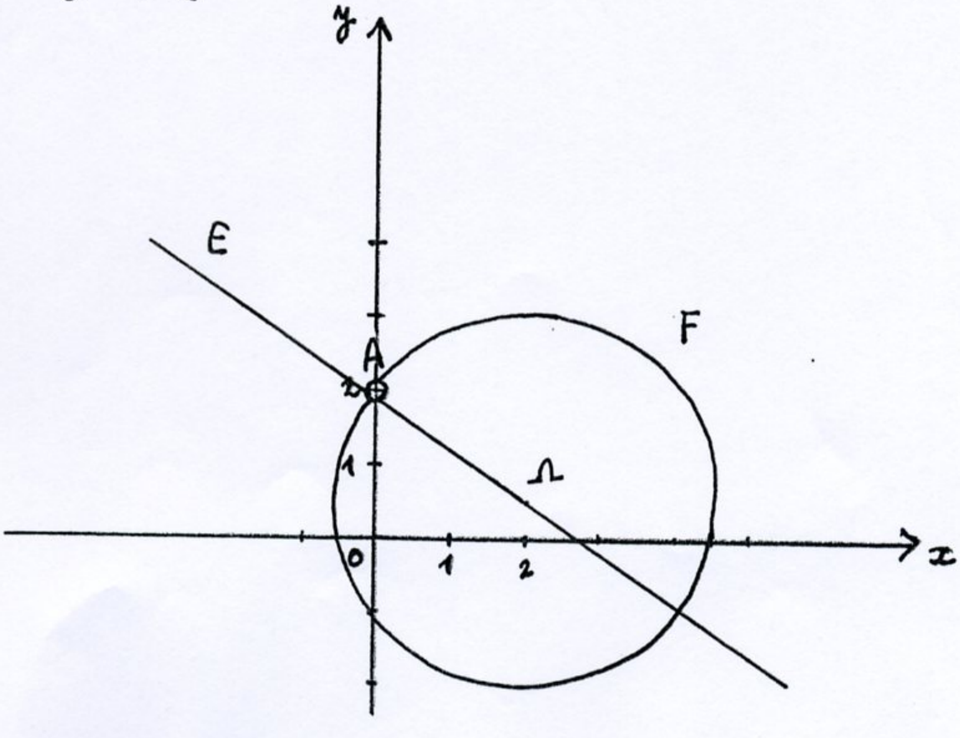
$\Rightarrow E = \Delta \setminus \{A\}$

$z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-y+\frac{1}{4} = 2+4+\frac{1}{4}$ et $(x,y) \neq (0,2)$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x-2)^2+(y-\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{25}{4}}_{\text{cercle } \mathcal{C}(\Omega(2,\frac{1}{2}), r=\frac{5}{2})}$ " " "

$A(0,2) \in \mathcal{C}$, car $4+\frac{9}{4} \overset{!}{=} \frac{25}{4}$

$\Rightarrow F = \mathcal{C} \setminus \{A\}$



2) $P(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + 10 - 20i$

a) $P(2i) = 0 \Leftrightarrow -8i - 4\alpha + 2\beta i + 10 - 20i = 0$

$\Leftrightarrow -4\alpha + 2\beta i = -10 + 28i \quad | :2$

$P(-3) = -74 - 110i \Leftrightarrow -27 + 9\alpha - 3\beta + 10 - 20i = -74 - 110i$

$\Leftrightarrow 9\alpha - 3\beta = -57 - 90i \quad | :3$

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta i = -5 + 14i \ (1) & | \cdot 3 \\ 3\alpha - \beta = -19 - 30i \ (2) & | \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6\alpha + 3\beta i = -15 + 42i \\ 6\alpha - 2\beta = -38 - 60i \end{cases} \Bigg| +$$

$\beta(-2+3i) = -53 - 18i$

$$\beta = \frac{-53-18i}{-2+3i} \cdot \frac{-2-3i}{-2-3i}$$

$$= \frac{106 + 159i + 36i - 54}{4+9}$$

$$= \frac{52 + 195i}{13}$$

$\beta = 4 + 15i$

Dans (2) : $3\alpha - 4 - 15i = -19 - 30i$

$3\alpha = -15 - 15i$

$\alpha = -5 - 5i$

b) $P(z) = z^3 - (5+5i)z^2 + (4+15i)z + 10 - 20i$

d'après a), $2i$ est une solution de l'éq. $P(z) = 0$.

	1	$-5-5i$	$4+15i$	$10-20i$
$2i$		$2i$	$6-10i$	$-10+20i$
	1	$-5-3i$	$10+5i$	0

$P(z) = (z-2i)\left[z^2 + (-5-3i)z + 10 + 5i\right]$

$\Delta = (-5-3i)^2 - 4(10+5i)$

$= 25 + 30i - 9 - 40 - 20i$

$= -24 + 10i$

pos : $t = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ racine carrée de Δ

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = -24 + 10i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 26 & (1) \\ a^2 - b^2 = -24 & (2) \\ ab > 0 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2) : 2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$

$(1)-(2) : 2b^2 = 50 \Leftrightarrow b^2 = 25 \Leftrightarrow b = \pm 5$

D'après (3) : racines carrées de Δ : $t_1 = 1+5i$ ③

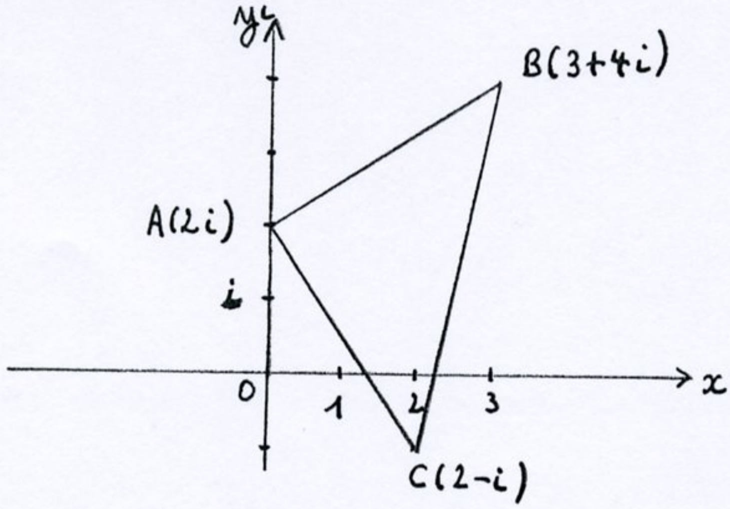
$t_2 = -1-5i$

$$z_1 = \frac{5+3i+1+5i}{2} = \frac{6+8i}{2} = 3+4i$$

$$z_2 = \frac{5+3i-1-5i}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

$S = \{2i \,;\, 3+4i \,;\, 2-i\}$

c)



$\overline{AB} = |3+4i-2i| = |3+2i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
$\overline{AC} = |2-i-2i| = |2-3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ $=$ $\Big\}$ Le Δ (ABC) est isocèle de sommet principal A

$\overline{BC} = |2-i-3-4i| = |-1-5i| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

On a : $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, car $26 \overset{!}{=} 13+13$

$\Rightarrow$ Le Δ (ABC) est rectangle en A.

Donc le Δ (ABC) est isocèle et rectangle en A.

II) 1) $$\left(3x^2 - \frac{1}{9x}\right)^{14} = \sum_{k=0}^{14} C_{14}^{k} (3x^2)^{14-k} \left(-\frac{1}{9x}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{14} C_{14}^{k}\, 3^{14-k}\, x^{28-2k} (-1)^k 3^{-2k} x^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{14} C_{14}^{k}\, 3^{14-3k} (-1)^k x^{28-3k}$$

<u>Cond :</u> $28-3k = 10 \Leftrightarrow -3k = -18 \Leftrightarrow k = 6$

terme en $x^{10} = C_{14}^{6}\, 3^{-4} (-1)^6 x^{10} = \frac{3003}{81} x^{10} = \frac{1001}{27} x^{10}$

2) X = nombre d'interprètes dans les numéros choisis

loi de proba $f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow [0,1]$

$x_i \longmapsto f(x_i) = p(X = x_i)$

$$f(1)=p(X=1)=\frac{C_5^3+C_8^3+C_7^3}{C_{20}^3}=\frac{10+56+35}{1140}=\frac{101}{1140}\simeq 0{,}089$$

$$f(2)=p(X=2)=\frac{C_5^2\cdot C_{15}^1+C_8^2\cdot C_{12}^1+C_7^2\cdot C_{13}^1}{C_{20}^3}=\frac{10\cdot 15+28\cdot 12+21\cdot 13}{1140}$$

$$=\frac{759}{1140}=\frac{253}{380}\simeq 0{,}666$$

$$f(3)=p(X=3)=\frac{C_5^1\cdot C_8^1\cdot C_7^1}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 8\cdot 7}{1140}=\frac{280}{1140}=\frac{14}{57}\simeq 0{,}246$$

Espérance mathématique:

$$E(X)=\sum_i x_i\,p_i=1\cdot\frac{101}{1140}+2\cdot\frac{253}{380}+3\cdot\frac{14}{57}=\frac{2459}{1140}\simeq 2{,}16$$

3) On a un schéma de Bernoulli avec X = nombre de fois que le tireur atteint le but.

X suit donc une loi binomiale.

a) $p(X=4)=C_{10}^4\cdot 0{,}1^4\cdot 0{,}9^6=210\cdot 0{,}1^4\cdot 0{,}9^6\simeq 0{,}0112$

b) n = nombre de tirs à effectuer

$$p(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-C_n^0\cdot 0{,}1^0\cdot 0{,}9^n=1-0{,}9^n$$

$$p(X\geq 1)\geq \frac{4}{5}\iff 1-0{,}9^n\geq\frac{4}{5}$$

$$\iff -0{,}9^n\geq -\frac{1}{5}$$

$$\iff 0{,}9^n\leq 0{,}2$$

$$\iff \ln 0{,}9^n\leq \ln 0{,}2$$

$$\iff n\geq\frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}9}$$

$$\iff n\geq 15{,}276$$

Le tireur doit au moins tirer 16 fois.

III) 1) $C:\ x=3-\sqrt{-9y^2-18y}$

$$\iff \sqrt{-9y^2-18y}=3-x \quad |\,(\ )^2$$

Cond: $\cdot\ -9y^2-18y\geq 0\iff 9y^2+18y\leq 0\iff 9y(y+2)\leq 0$

$$\iff y\in[-2,0]$$

$\cdot\ 3-x\geq 0\iff x\leq 3$

$-9y^2-18y = 9-6x+x^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+9(y^2+2y+1) = 9 \quad | : 9$

$\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{9} + (y+1)^2 = 1$ avec $x \leq 3$ et $y \in [-2,0]$

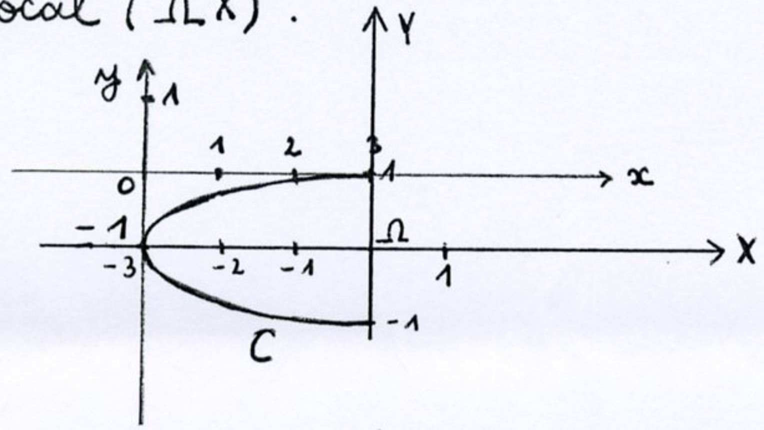
pos : $\begin{cases} X = x-3 \\ Y = y+1 \end{cases}$

$\frac{X^2}{9} + Y^2 = 1 \Leftrightarrow Y^2 = 1 - \frac{X^2}{9}$

$\Leftrightarrow Y = \pm\sqrt{1-\frac{X^2}{9}}$ avec $-3 \leq X \leq 0$

X	-3	-2	-1	0
Y	0	$\pm 0{,}75$	$\pm 0{,}94$	± 1

C est une demi-ellipse de centre $\Omega(3,-1)$ et d'axe focal (ΩX).



2) a) $\Gamma : x^2-4y^2-4=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

$a=2,\ b=1 \Rightarrow c^2 = a^2+b^2 = 1+4=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$

Γ est une hyperbole de centre O et d'axe focal l'axe des x.

sommets : $(2,0)$, $(-2,0)$

foyers : $(\sqrt{5},0)$, $(-\sqrt{5},0)$

directrices : $x = \pm\frac{a^2}{c} \Leftrightarrow x = \pm\frac{4}{\sqrt{5}} = \pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$

asymptotes : $y = \pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{2}x$

b) $d : x-y+2=0 \Leftrightarrow y = x+2$

$t \perp d \Leftrightarrow m\,m' = -1 \Leftrightarrow m' = -1$

$t : y = -x+p$

$t \cap \Gamma : \begin{cases} x^2-4y^2-4=0 & (1) \\ y = -x+p & (2) \end{cases}$

(2) dans (1) : $x^2 - 4(-x+p)^2 - 4 = 0$

$$x^2 - 4(x^2 - 2px + p^2) - 4 = 0$$

$$x^2 - 4x^2 + 8px - 4p^2 - 4 = 0$$

$$-3x^2 + 8px - 4p^2 - 4 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$3x^2 - 8px + 4p^2 + 4 = 0$$

$$\Delta = 64p^2 - 12(4p^2+4) = 64p^2 - 48p^2 - 48$$

$$= 16p^2 - 48 = 16(p^2 - 3)$$

t est tangente à $\Gamma \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow p^2 = 3 \Leftrightarrow p = \pm\sqrt{3}$

tangentes : $t_1 : y = -x + \sqrt{3}$ $\quad t_2 : y = -x - \sqrt{3}$

Coordonnées des points de tangence :

$\boxed{t_1 \cap \Gamma}$: $p = \sqrt{3}$: $\quad 3x^2 - 8\sqrt{3}x + 16 = 0$

$$(\sqrt{3}x - 4)^2 = 0$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = -\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$I_1\left(\underbrace{\frac{4\sqrt{3}}{3}}_{\simeq 2,31}, \underbrace{-\frac{\sqrt{3}}{3}}_{\simeq -0,58}\right)$$

$\boxed{t_2 \cap \Gamma}$: $p = -\sqrt{3}$: $\quad 3x^2 + 8\sqrt{3}x + 16 = 0$

$$(\sqrt{3}x + 4)^2 = 0$$

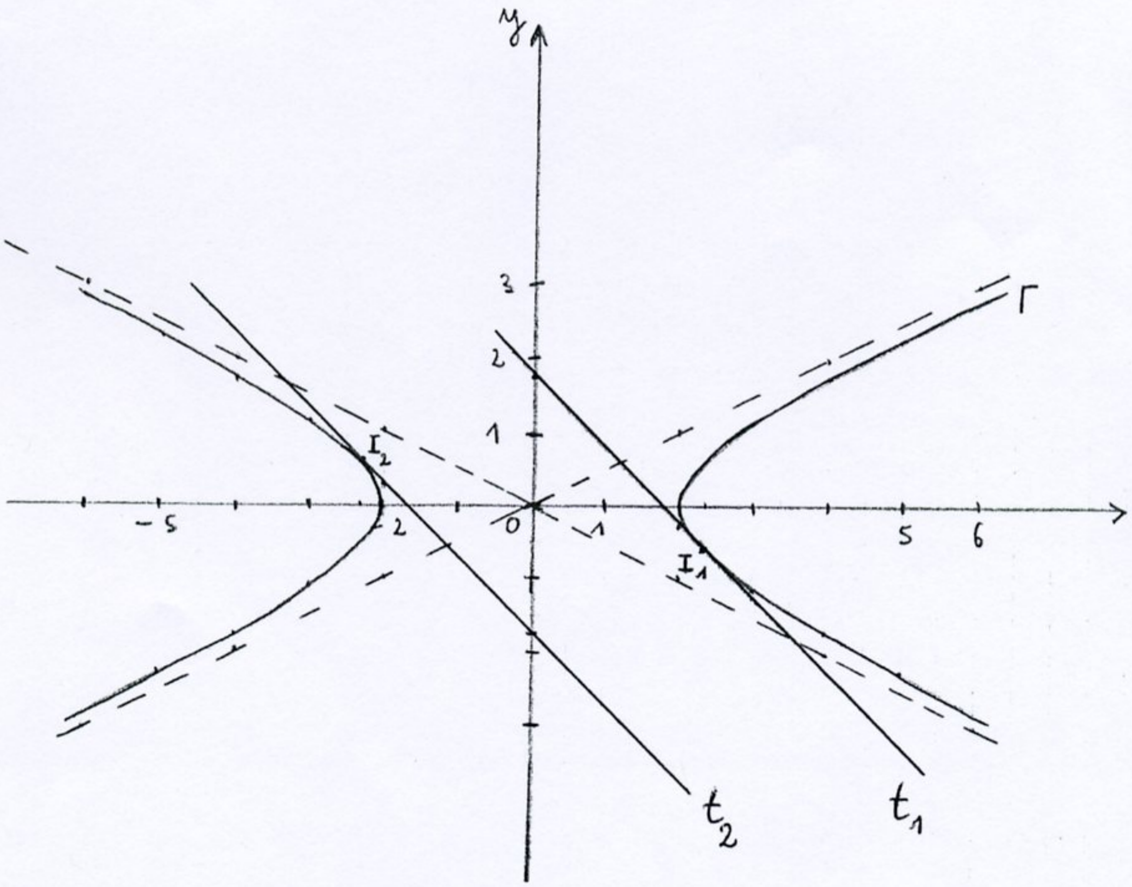
$$x = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$I_2\left(\underbrace{-\frac{4\sqrt{3}}{3}}_{\simeq -2,31}, \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}}_{\simeq 0,58}\right)$$

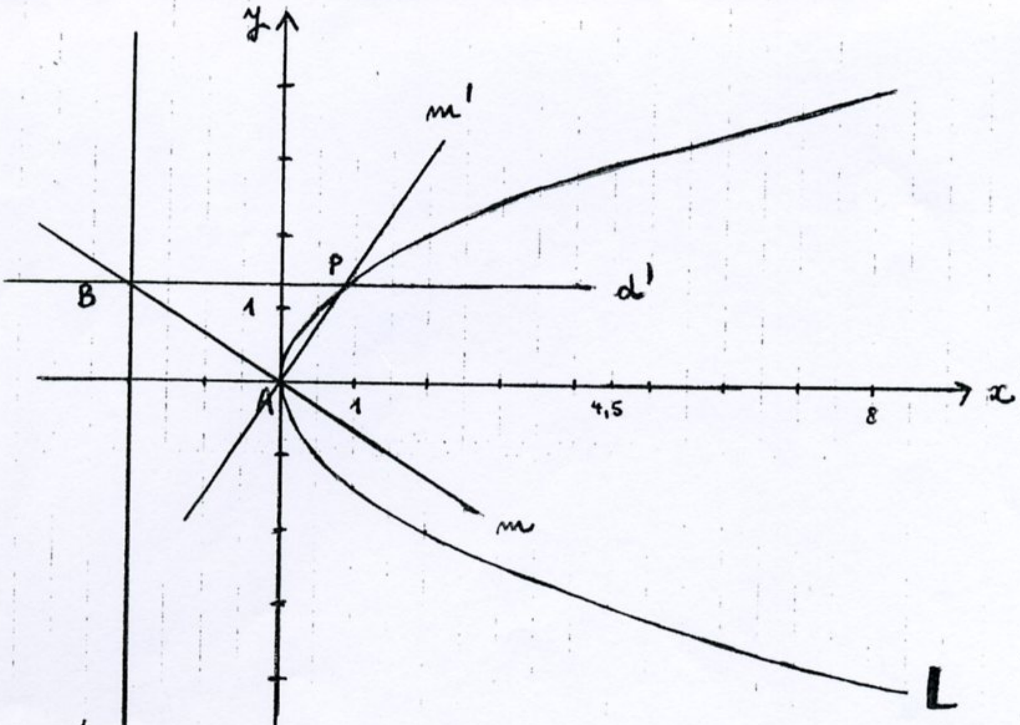
c) $\Gamma : y^2 = \frac{x^2}{4} - 1 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$

pos : $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4}$ $\quad$ Dom $f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

x	2	3	4	5
$f(x)$	0	$\underbrace{\frac{\sqrt{5}}{2}}_{1,12}$	$\underbrace{\frac{\sqrt{12}}{2}}_{1,73}$	$\underbrace{\frac{\sqrt{21}}{2}}_{2,29}$



IV)



Choix du repère orthonormé :

origine : A

axe des x : droite passant par A et perpendiculaire à d

axe des y : droite passant par A et parallèle à d

$\mathbb{L} = \{ P \mid P \in d' \cap m' \}$

Expressions analytiques :

$A(0,0)$ et $d : x = -2$

$m : x = 0$ ne donne pas de point B

$\Rightarrow m : y = \lambda x$ (λ : paramètre réel)

vect. dir. de m : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \lambda\end{pmatrix}$

$M(x,y) \in m' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \odot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow x + \lambda y = 0$ éq. cart. de m'

$m \cap d : \begin{cases} y = \lambda x & (1) \\ x = -2 & (2) \end{cases}$ (2) dans (1) : $y = -2\lambda$

$\Rightarrow B(-2, -2\lambda)$

$\Rightarrow d' : y = -2\lambda$

$\mathbb{L} : \begin{cases} x + \lambda y = 0 & (1) \\ y = -2\lambda & (2) \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{y}{2}$

Dans (1) : $x - \frac{y^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = x \Leftrightarrow y^2 = 2x$ éq. cart. de $\mathbb{L}$

$\mathbb{L}$ est une parabole de sommet A et d'axe focal l'axe (Ox).

paramètre : $p = 1$

directrice : $x = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}$

foyer : $F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$y^2 = 2x$

x	0	0,5	1	2	4,5	8
y	0	± 1	$\pm\sqrt{2}$	± 2	± 3	± 4