Question 1

1) * 8 points

$$z' = \frac{(1+i)(x+iy)+1}{-x-iy+1} = \frac{x-y+1+i(x+y)}{-x-i(y-1)} \cdot \frac{-x+i(y-1)}{-x+i(y-1)}$$

$$= \frac{-x(x-y+1)-(x+y)(y-1)+i(-x^2-xy)+i(y-1)(x-y+1)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$\boxed{z' = \frac{(-x^2-y^2+y)+i(-x^2-y^2-x+2y-1)}{x^2+(y-1)^2}}$$

z' imaginaire pur $\iff x^2+y^2-y=0 \iff x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

$M(z) \in E \iff M(z)$ appartient au cercle C_1 de centre $\omega_1(0;\frac{1}{2})$

et de rayon $R_1=\frac{1}{2}$ privé du point $I(i)$

$E = C_1 \setminus \{I\}$

* z' réel $\iff -x^2-y^2-x+2y-1=0$ $\quad (x;y)\neq(0;1)$

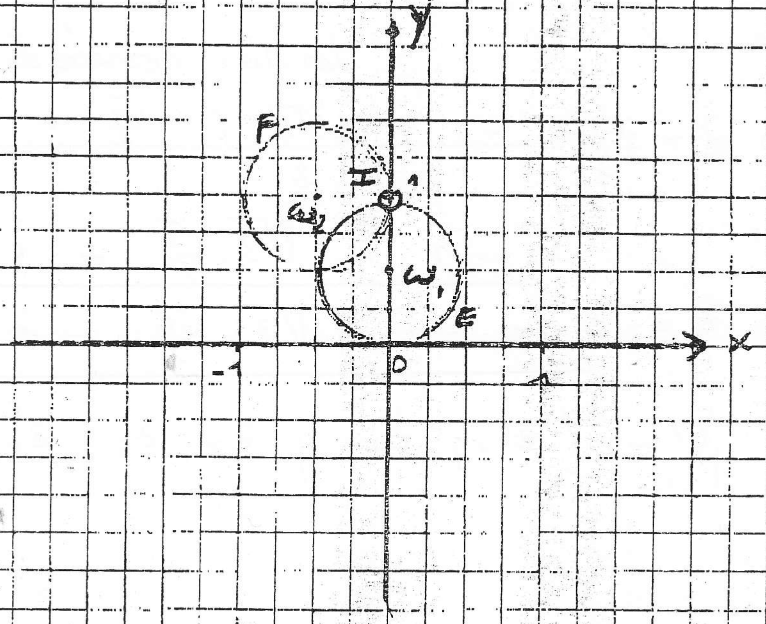
$\iff (x+\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$

$M(z) \in F \iff M(z)$ appartient au cercle C_2

de centre $\omega_2(-\frac{1}{2};1)$ et de rayon $R_2=\frac{1}{2}$

privé du point $I(0;1)$

$F = C_2 \setminus \{I\}$



2

2) Les racines cubiques de 8 sont : $\mathfrak{z}_k = 2 \cdot \text{cis}\,\frac{2k\pi}{3}$ $k \in \{0;1;2\}$

7 points

$\mathfrak{z}_0 = 2$; $\mathfrak{z}_1 = 2\,\text{cis}\,\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\mathfrak{z}_2 = 2\,\text{cis}\frac{4\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -1 + i\sqrt{3}$ $\qquad = -1 - i\sqrt{3}$

$\Rightarrow (z^2 + 2z)^3 = 8 \iff z^2 + 2z = 2$ ou $z^2 + 2z = -1 + i\sqrt{3}$ ou $z^2 + 2z = -1 - i\sqrt{3}$

* $z^2 + 2z = 2 \iff \underline{z^2 + 2z - 2 = 0} \iff \underline{z = z_1 = -1 + \sqrt{3}}$ ou $\underline{z = z_2 = -1 - \sqrt{3}}$

* $z^2 + 2z = -1 + i\sqrt{3} \iff \underline{z^2 + 2z + 1 - i\sqrt{3} = 0}$

$\Delta = 4 - 4(1 - i\sqrt{3}) = 4i\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\,\text{cis}\frac{\pi}{2}$

Les rac. carrées de Δ sont : $\pm 2\sqrt[4]{3}\,\text{cis}\frac{\pi}{4}$

$\sqrt{2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow z = \underline{z_3} = \dfrac{-2 + 2\sqrt[4]{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \underline{-1 + \sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}$

ou $z = \underline{z_4} = \underline{-1 - \sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}$

* $z^2 + 2z = -1 - i\sqrt{3} \iff \underline{z^2 + 2z + 1 + i\sqrt{3} = 0}$

$\Delta = -4i\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\,\text{cis}\frac{3\pi}{2}$

Les rac. carrées de Δ sont : $\pm 2\sqrt[4]{3}\cdot\text{cis}\frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow z = z_5 = \dfrac{-2 + 2\sqrt[4]{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}$

$= \underline{-1 - \sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + i\sqrt[4]{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2}}$

ou $z = \underline{z_6 = -1 + \sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - i\sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$S = \{z_1 ; z_2 ; z_3 ; z_4 ; z_5 ; z_6\}$

Question 2

1) 10 points

a) card $\Omega = 36$

Soit A : "2 numéros identiques"

B : "2 numéros de parités différentes"

(3) C : "les autres cas"

Card $A = 6$ card $B = 18$ Card $C = 12$

$\Rightarrow P(A) = \frac{6}{36}$ $P(B) = \frac{18}{36}$ $P(C) = \frac{12}{36}$

$\Rightarrow \boxed{P(X=-10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad P(X=-5) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad P(X=15) = \frac{12}{36}} = \frac{1}{3}$

$\underline{E(X)} = -10 \cdot \frac{6}{36} - 5 \cdot \frac{18}{36} + 15 \cdot \frac{12}{36} = \frac{30}{36} = \underline{\frac{5}{6}}$ ($\simeq 0{,}8\overline{3}$)

b) 1. Pour une partie, soit succès : le joueur gagne 15 €

épreuve de B. $p = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

soit échec : le joueur perd 5 € ou 10 €

(4) $q = \frac{2}{3}$.

Pour 8 parties répétées dans les mêmes conditions on est en présence d'un schéma de Bernoulli $n = 8$, $p = \frac{1}{3}$

la loi de probabilité de Y est donc une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \frac{1}{3}$.

$\underline{P(Y = k) = C_8^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{8-k} \quad k = 0, 1, 2, \ldots 8}$

2. $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$

$= 1 - C_8^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^8 \simeq 0{,}96$

3. $E(Y) = n \cdot p = 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

c) $\underline{P(Y \geq 1) > 0{,}999} \Leftrightarrow \underline{1 - P(Y = 0) > 0{,}999}$.

$\Leftrightarrow P(Y = 0) < 0{,}001$

(3) $\Leftrightarrow C_n^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < 0{,}001$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < 0{,}001$

$\Leftrightarrow n > \frac{\log 0{,}001}{\log \frac{2}{3}}$

$\Leftrightarrow \underline{n > 17{,}04}$.

n doit être au moins égal à $\underline{18}$.

5 points

2) $(1-X^2)\cdot(1-2X^2)^{13} = (1-2X^2)^{13} - X^2(1-2X^2)^{13}$

$$= \sum_{k=0}^{13} (-1)^k \cdot C_{13}^k \cdot (2X^2)^k - X^2 \sum_{k=0}^{13} (-1)^k C_{13}^k (2X^2)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{13} (-1)^k \cdot C_{13}^k \, 2^k \cdot X^{2k} - \sum_{k=0}^{13} (-1)^k C_{13}^k \, 2^k \, 2^{2k+2}$$

$$= S_1 \qquad - \qquad S_2.$$

terme en X^{12} de S_1 : $2k = 12 \Rightarrow k = 6$

$\Rightarrow (-1)^6 \cdot C_{13}^6 \cdot 2^6 \cdot X^{12}$ $= 109.824\, x^{12}$

terme en X^{12} de S_2 : $2k+2 = 12 \Rightarrow k = 5$

$\Rightarrow (-1)^5 \cdot C_{13}^5 \, 2^5 \cdot \cancel{X}^{12}$ $= -41184 \cdot x^{10}$

le coefficient du terme en X^{12} est donc :

$$C_{13}^6 \cdot 2^6 - (-1)\, C_{13}^5 \cdot 2^5 = 151.008$$

Question 3

1) 7 points

$4x^2 - 9y^2 - 32x + 36y - 8 = 0 \iff 4(x-4)^2 - 9(y-2)^2 = 36$

$\iff \boxed{\dfrac{(x-4)^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1}$

translation de repère : $\begin{cases} x' = x-4 \\ y' = y-2 \end{cases}$

Dans le nouveau repère : $\dfrac{x'^2}{9} - \dfrac{y'^2}{4} = 1$; $c = \sqrt{13}$; $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

hyperbole de centre $O'(0;0)$

de sommets $A(3;0)$ et $A'(-3;0)$

de foyers $F(\sqrt{13};0)$ et $F'(-\sqrt{13};0)$

de directrices $d \equiv x' = \dfrac{9\sqrt{13}}{13}$ et $d' \equiv x' = -\dfrac{9\sqrt{13}}{13}$

d'asymptotes $a \equiv y' = \dfrac{2}{3}x'$ et $a' \equiv y' = -\dfrac{2}{3}x'$

Dans le repère d'origine :

hyperbole de centre $O'(4;2)$; $c = \sqrt{13}$; $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

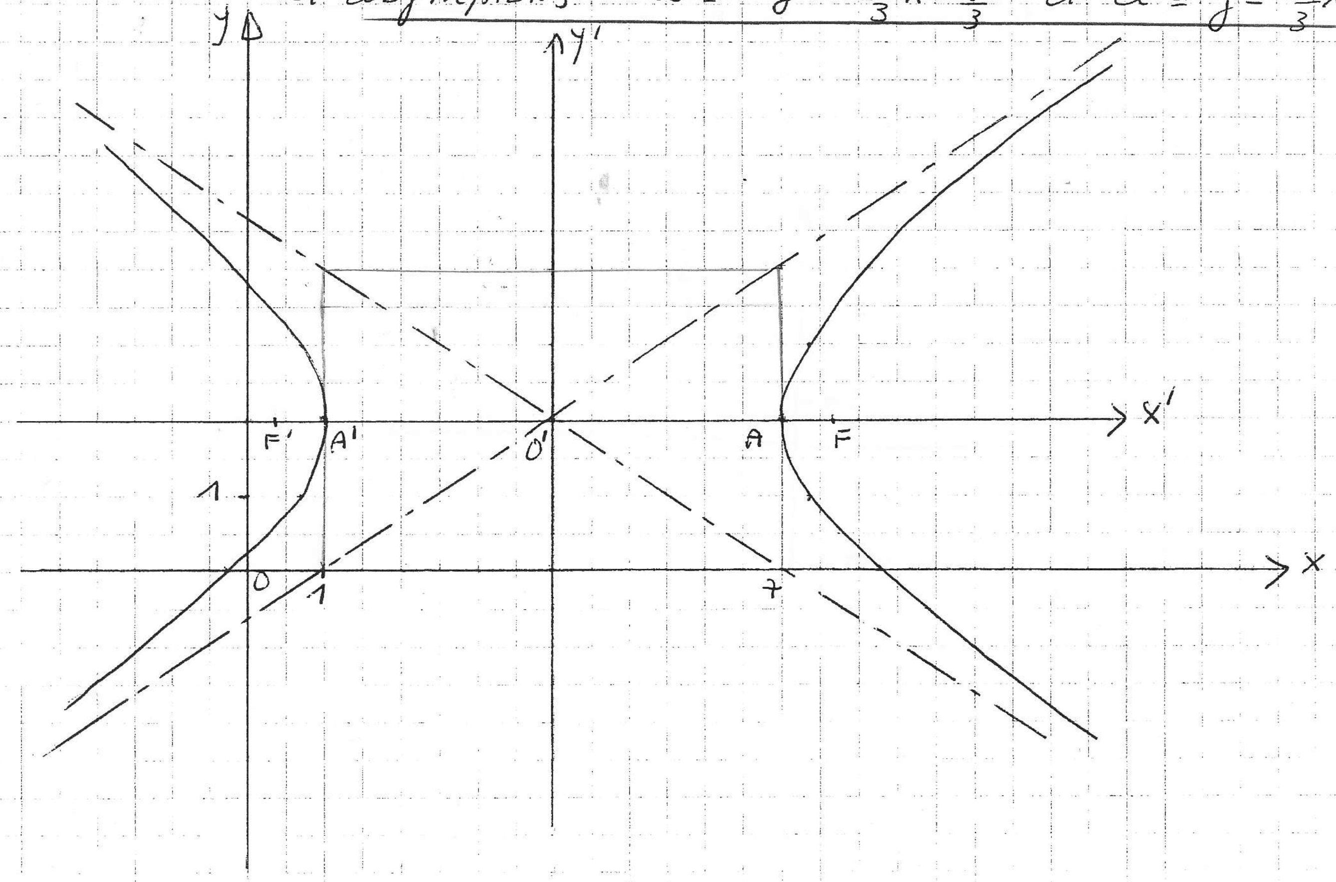
d'axe focal : $y = 2$

de sommets $A(7;2)$ et $A'(1;2)$

de foyers $F(\sqrt{13}+4;2)$ et $F'(-\sqrt{13}+4;2)$

de directrices $d \equiv x = \dfrac{9\sqrt{13}}{13} + 4$ et $d' \equiv x = -\dfrac{9\sqrt{13}}{13} + 4$

d'asymptotes $a \equiv y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}$ et $a' \equiv y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{14}{3}$



2) $y^2 + 4x - 6y = 0 \iff (y-3)^2 = -4\left(x - \frac{9}{4}\right)$

8 points

La conique est une parabole $\mathcal{P}$ de sommet $S\left(\frac{9}{4} ; 3\right)$ et d'axe : $y = 3$

Une tangente issue de $A\left(-\frac{3}{2} ; -1\right)$ ne sera donc pas parallèle à Oy.

Soit $t \equiv y = mx + p$ avec $A\left(-\frac{3}{2} ; -1\right) \in t \Rightarrow p = \frac{3}{2}m - 1$

$$\begin{cases} y = mx + \frac{3}{2}m - 1 \\ y^2 + 4x - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(mx + \frac{3}{2}m - 1\right)^2 + 4x - 6\left(mx + \frac{3}{2}m - 1\right) =$$

$$\Rightarrow m^2x^2 + (3m^2 - 8m + 4)x + \left(\frac{9}{4}m^2 - 12m + 7\right) = 0 \quad (*)$$

Cas $m=0$? ✗✗

t tangente à $\mathcal{P} \iff \Delta_{(*)} = 0$ et $m \neq 0$

$\Delta_{(*)} = 0 \iff 60m^2 - 64m + 16 = 0$

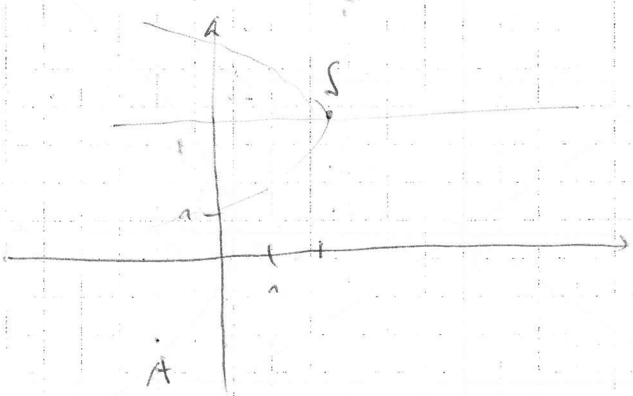
$\iff m = \frac{2}{5}$ ou $m = \frac{2}{3}$

Les tangentes à la parabole sont :

$t_1 \equiv y = \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}$ et $t_2 \equiv y = \frac{2}{3}x$.

$t_1 \cap \mathcal{P} = \{I_1\}$ avec $I_1(-4 ; -2)$

$t_2 \cap \mathcal{P} = \{I_2\}$ avec $I_2(0 ; 0)$



Question 4

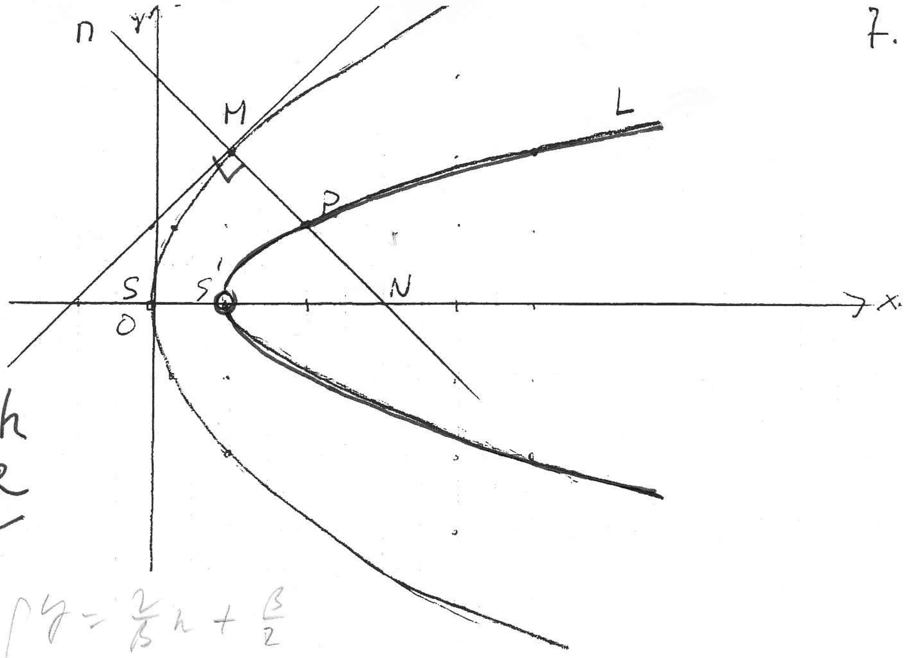
$y^2 = 4x$.

Soit $M(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}$

$\beta^2 = 4\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\beta^2}{4}$

$\Rightarrow M\left(\frac{\beta^2}{4} ; \beta\right)$

paramètre $\beta \in \mathbb{R}$



$y = \frac{2}{\beta}x + \frac{\beta}{2}$

l'équation de $t \equiv \beta y = 2\left(x + \frac{\beta^2}{4}\right)$ $\qquad \vec{u}_t \begin{pmatrix}\beta \\ 2\end{pmatrix}$ est un vect. dir. de t

$\Leftrightarrow 2x - \beta y + \frac{\beta^2}{2} = 0$

équation de n : $A(x, y) \in n \Leftrightarrow \vec{MA} \perp \vec{u}_t$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - \frac{\beta^2}{4} \\ y - \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$y = -\frac{\beta}{2}x + \frac{\beta^3 + 8\beta}{8}$

$4\beta x + 8y - \beta^3 - 8\beta =$

$\Leftrightarrow \beta x + 2y - \frac{\beta^3}{4} - 2\beta = 0$

$y_N = 0$ et $N \in n \Rightarrow \beta x_N = \frac{\beta^3}{4} + 2\beta$ $\quad y = -\frac{\beta}{2}x + \frac{\beta^3}{8} + \beta$

si $\beta \neq 0 \Rightarrow x_N = \frac{\beta^2}{4} + 2 \Rightarrow N\left(\frac{\beta^2}{4} + 2 ; 0\right)$

si $\beta = 0$, $M = S = O$, $t \equiv x = 0$, $n \equiv y = 0$

$\Rightarrow N$ n'est pas défini

$P = \text{mil}[MN] \Rightarrow \begin{cases} x_P = \frac{\beta^2}{4} + 1 & (1) \\ y_P = \frac{\beta}{2} & (2) \end{cases}$ $\quad (\beta \neq 0)$

$(2) \Rightarrow \beta = 2y_P$; $(1) \Rightarrow x_P = \frac{4y_P^2}{4} + 1$

$\Rightarrow x_P = y_P^2 + 1$.

Le lieu L est la parabole $\mathcal{P}'$ d'éq. $y^2 = x - 1$

excepté son sommet $S'(1 ; 0)$ $\qquad$ car $\beta = 0 \Rightarrow y = 0$, $x = 1$