Corrigé

I. Posons $p(z) = z^4 + \alpha z^2 + \beta + 12i$.

1)

$$p\left(\sqrt{2}(1+i)\right) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -16 + 4i\alpha + \beta + 12i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -16 + \beta = 0 \\ 4\alpha + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 16 \\ \alpha = -3 \end{cases}$$

2) L'équation à résoudre s'écrit alors : $z^4 - 3z^2 + 16 + 12i = 0 \qquad (E')$
En posant $t = z^2$, (E') s'écrit : $t^2 - 3t + 16 + 12i = 0$
D'après ce qui précède, $\left[\sqrt{2}(1+i)\right]^2 = 4i$ est solution de cette équation.
En utilisant le schéma de Horner, on trouve $\forall t \in \mathbb{C} \quad t^2 - 3t + 16 + 12i = (t-4i)(t-3+4i)$
Donc

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad (E') \Leftrightarrow z^2 = 4i \text{ ou } z^2 = 3 - 4i$$
$$\Leftrightarrow z = \sqrt{2}(1+i) \text{ ou } z = -\sqrt{2}(1+i) \text{ ou } z^2 = 3 - 4i$$

Déterminons les racines carrées complexes de $3 - 4i$,i.e. déterminons $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = 3 - 4i$:
Posons $z = x + iy \qquad (x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R})$
Comme $|3 - 4i| = 5$, on a

$$z^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ 2xy = -4 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ 2xy = -4 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \end{cases}$$

Les racines carrées complexes de $3 - 4i$ sont donc $2 - i$ et $-2 + i$.
Finalement :
$z^4 - 3z^2 + 16 + 12i = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{2}(1+i)$ ou $z = -\sqrt{2}(1+i)$ ou $z = -2 + i$ ou $z = 2 - i$

$$\boxed{S = \left\{\sqrt{2}(1+i); -\sqrt{2}(1+i); -2+i; 2-i\right\}}$$

3) Posons $z_1 = \sqrt{2}(1+i) \qquad z_2 = -\sqrt{2}(1+i) \qquad z_3 = 2 - i \qquad z_4 = -2 + i$.

Le milieu M de $[AB]$ a l'affixe

$$z_M = \frac{\sqrt{2}(1+i) - \sqrt{2}(1+i)}{2} = 0$$

Le milieu N de $[CD]$ a l'affixe

$$z_N = \frac{2 - i - 2 + i}{2} = 0$$

Les deux diagonales ont donc même milieu et par conséquent, $ADBC$ est un parallélogramme.

II.

1) a) Un client donné ne vient pas retirer son ticket avec une probabilité $p = 0,17$. On répète de façon indépendante pour chacun des 16 clients l'épreuve de Bernoulli "vient chercher son ticket ou ne vient pas chercher son ticket". La variable aléatoire X : "nombre de clients qui ne viennent pas retirer leur ticket" suit alors une loi binomiale de paramètres $n = 16$ et $p = 0,17$. $P(X=k) = C_{16}^{k}\, 0,17^{k}\, 0,83^{16-k}$

La probabilité cherchée est

b) $P(X \geq 4) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3)$
$\cancel{= 1 - (0.17)^{16} - 16\,(0.83)\,(0.17)^{15} - 120\,(0.83)^2\,(0.17)^{14} - 560\,(0.83)^3\,(0.17)^{13}}$
$\cancel{\approx 0.999\,999\,966\,9}$ $0,2836 \simeq 28,36\ \%$

2) En ordonnant les 31 personnes, l'ensemble Ω est constitué de 31-uplets dont chacune des 31 composantes est prise parmi les 365 jours de l'année.

Donc: $\#\Omega = 365^{31}$.

Considérons l'événement A : "au moins deux de 31 personnes sont nées le même jour"

Alors $\overline{A}$ est l'événement: "les dates de naissance des 31 personnes sont différentes deux à deux"

Donc: $\#\overline{A} = A_{365}^{31}$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{A_{365}^{31}}{365^{31}} = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-31)!}}{365^{31}} \approx 0.73$

3) Voici le tableau donnant les résultats de l'expérience :

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

a) La loi de probabilité de la variable aléatoire X est alors :

x_i	$P(X = x_i)$
0	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
1	$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$
2	$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$
3	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
4	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
5	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

b) ...

c) espérance mathématique : $E(X) = \frac{1}{36}(0\cdot 6 + 1\cdot 10 + 2\cdot 8 + 3\cdot 6 + 4\cdot 4 + 5\cdot 2) = \frac{35}{18}$ $\simeq 1{,}94$

variance : $V(X) = \ldots = \frac{2768}{1944} \cancel{\approx 1.42} = \frac{665}{324} \simeq 2{,}05$

écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{\frac{2765}{1944}} \cancel{\approx 1.19}$

$= \sqrt{\frac{665}{324}} \simeq 1{,}43$

III.

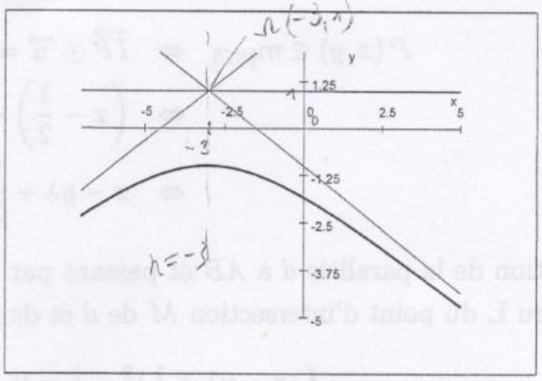
1) $C \equiv y = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{x^2}{3} + 2x + 15}$ C.E. : $\frac{x^2}{3} + 2x + 15 \geq 0$ vérifié $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad y = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{x^2}{3} + 2x + 6} \;\Leftrightarrow\; y - 1 = -\frac{2}{3}\sqrt{x^2 + 6x + 18}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^2 = \frac{4}{9}\left(x^2 + 6x + 18\right) \\ y - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$$

La courbe C est donc la partie de l'hyperbole $H \equiv \frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$ située dans le demi-plan $\Pi \equiv y < 1$



2)

$$\Gamma_1 \equiv x^2 - 4y - 16 = 0$$

$$x^2 - 4y - 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow\; x^2 = 4(y + 4)$$

a) Γ_1 est donc une parabole (excentricité $\epsilon = 1$) de paramètre $p = 2$ et de sommet $S(0, -4)$. L'axe focal de cette parabole est l'axe des ordonnées et le foyer est le point $F(0, -3)$.

b) Γ_2 est donc la parabole de sommet $O(0,0)$ et de foyer $F(0, -3)$.
$\Gamma_2 \equiv x^2 = -12y$

c) Les coordonnées des points d'intersection de Γ_1 et de Γ_2 sont les solutions du système

$$\begin{cases} x^2 - 4y - 16 = 0 \\ x^2 = -12y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -16y - 16 = 0 \\ x^2 = -12y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2\sqrt{3} \text{ ou } x = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

Les points d'intersection sont donc $A\left(2\sqrt{3}, -1\right)$ et $B\left(-2\sqrt{3}, -1\right)$.

d) Pour des raisons de symétrie, il suffit de montrer que Γ_1 et Γ_2 se coupent à angle droit en A.
équation cartésienne de la tangente à Γ_1 en A :

$$t_{\Gamma_1} \equiv 2\sqrt{3}x = 2(y+4) + 2(-1+4) \Leftrightarrow \sqrt{3}x = y+7 \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - 7$$

équation cartésienne de la tangente à Γ_2 en A :

$$t_{\Gamma_2} \equiv 2\sqrt{3}x = -6y - 6(-1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$$

Comme$\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1$,les deux paraboles Γ_1 et Γ_2 se coupent à angle droit.

IV.

1) Choisissons un repère orthonormé de telle sorte que AB soit l'axe des abscisses, m l'axe des ordonnées et $B(1,0)$.
Posons $C(0,\lambda)$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$
équation cartésienne de BC : $BC \equiv y = -\lambda x + \lambda$ $\qquad$ vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1,-\lambda)$
Soit I le milieu de $[BC]$. On a:$I\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
P(x,y) \in m_{[BC]} &\Leftrightarrow \overrightarrow{IP} \odot \overrightarrow{u} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{\lambda}{2}\right)(-\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow x - y\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2} = 0
\end{aligned}$$

équation de la parallèle d à AB et passant par C : $d \equiv y = \lambda$
Le lieu $\mathbb{L}$ du point d'intersection M de d et de $m_{[BC]}$ est défini par

$$\mathbb{L} \equiv \begin{cases} x - y\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2} = 0 & (1) \\ y = \lambda & (2) \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Elimination du paramètre :

$$\begin{aligned}
(2) \text{ dans } (1) \quad &: \quad x - y^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad y^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Cette équation est l'équation d'une parabole d'axe focal Ox et de sommet $S\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
Comme $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}$,le lieu $\mathbb{L}$ est la parabole d'équation $y^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$.
Le point M est un point de la médiatrice de $[BC]$,donc M est équidistant de B et de C. Comme de plus $CM \perp m$, le point M est tel que $\overline{BM} = d(M.m)$.
Par conséquent le point B est le foyer et la droite m est la directrice de la parabole trouvée.

2) Choisissons un repère orthonormé de telle sorte que l'origine soit le centre de l'ellipse, l'axe des abscisses le grand axe et l'axe des ordonnées le petit axe.
Alors $A\,(3,0)$ $\quad B\,(-3,0)$ $\quad C\,(0,2)$ $\quad D\,(0,-2)$
Le point M parcourt l'ellipse, on a donc

$$M\,(3\cos\theta, 2\sin\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Le point P est la projection orthogonale de M sur CD, c-à-d sur l'axe des ordonnées. Donc

$$P\,(0, 2\sin\theta)$$

Les coordonnées du milieu I de $[MP]$ sont alors

$$\mathbb{L} \equiv \begin{cases} x = \frac{3}{2}\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Le lieu $\mathbb{L}$ est alors l'ellipse de centre O, d'axe focal Oy, de grand axe 4 et de petit axe 3.