Corrigé

Question 1

1) $z' = \dfrac{2z-3i}{iz-6}$ avec $z = x+yi$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-6)\}$

$$z' = \frac{2(x+yi)-3i}{i(x+yi)-6} = \frac{2x+2yi-3i}{-y-6+xi} \cdot \frac{-y-6-xi}{-y-6-xi}$$

$$= \frac{-2xy-12x-2x^2i-2y^2i-12yi+2xy+3yi+18i-3x}{(-y-6)^2-(xi)^2}$$

$$= \frac{-15x+(-2x^2-2y^2-9y+18)i}{(-y-6)^2+x^2}$$

z' est réel $\Leftrightarrow -2x^2-2y^2-9y+18=0 \quad | : (-2)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{9}{2}y-9=0$

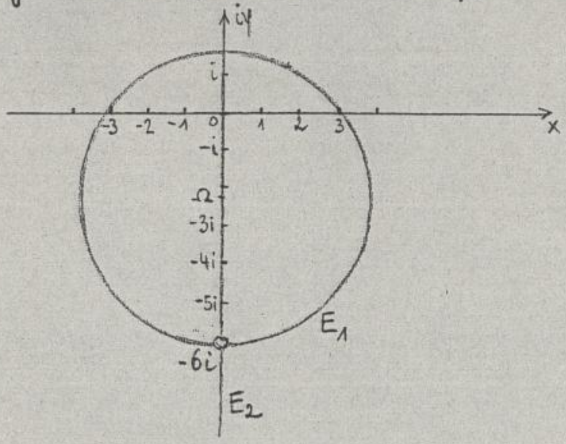
$\Leftrightarrow x^2+\left(y^2+2\cdot\frac{9}{4}y+\frac{81}{16}\right)-\frac{81}{16}-9=0$

$\Leftrightarrow x^2+\left(y+\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{225}{16}$

E_1 est le cercle de centre $\Omega\left(0,-\frac{9}{4}\right)$ et de rayon $r=\frac{15}{4}$ excepté le point d'affixe $-6i$

z' est imaginaire pur $\Leftrightarrow 15x=0 \Leftrightarrow x=0$

E_2 est l'axe imaginaire excepté le point d'affixe $-6i$.



2) $z = \sqrt{6-3\sqrt{2}} - i\sqrt{6+3\sqrt{2}}$

a) $z^2 = 6-3\sqrt{2}+i^2(6+3\sqrt{2})-2i\sqrt{(6-3\sqrt{2})(6+3\sqrt{2})}$

$= -6\sqrt{2}-2i\sqrt{36-18}$

$= -6\sqrt{2}-6\sqrt{2}\,i$

$= -6\sqrt{2}(1+i)$

$z^4 = (z^2)^2 = 72(1+i^2+2i) = 144i$

$z^4 = 144 \operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$

b) Calculons les racines quatrièmes de $144 \text{ cis } \frac{\pi}{2}$:

$$z_k = \sqrt[4]{144}\ \text{cis}\left(\frac{\pi}{8} + k\cdot\frac{2\pi}{4}\right) \quad \text{avec } k = 0, 1, 2, 3$$

$$\sqrt[4]{144} = \sqrt[4]{2^4\cdot 3^2} = 2\cdot\sqrt{3}$$

$z_0 = 2\sqrt{3} \text{ cis } \frac{\pi}{8}$ $\qquad \mathcal{R}(z_0) > 0$ et $\mathcal{I}(z_0) > 0$

$z_1 = 2\sqrt{3} \text{ cis } \frac{5\pi}{8}$ $\qquad \mathcal{R}(z_1) < 0$ et $\mathcal{I}(z_1) > 0$

$z_2 = 2\sqrt{3} \text{ cis } \frac{9\pi}{8}$ $\qquad \mathcal{R}(z_2) < 0$ et $\mathcal{I}(z_2) < 0$

$z_3 = 2\sqrt{3} \text{ cis } \frac{13\pi}{8}$ $\qquad \mathcal{R}(z_3) > 0$ et $\mathcal{I}(z_3) < 0$

Comme $\mathcal{R}(z) > 0$ et $\mathcal{I}(z) < 0$, on a $z = z_3 = 2\sqrt{3} \text{ cis } \frac{13\pi}{8}$

c) $z = 2\sqrt{3} \text{ cis } \frac{13\pi}{8} \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{13\pi}{8} = \frac{\sqrt{6-3\sqrt{2}}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6-3\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ \sin\frac{13\pi}{8} = -\frac{\sqrt{6+3\sqrt{2}}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6+3\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{cases}$

or $\cos\frac{13\pi}{8} = -\cos\frac{5\pi}{8} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$\sin\frac{13\pi}{8} = -\sin\frac{5\pi}{8} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = -\cos\frac{\pi}{8} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

3) $P(z) = 2z^2 + \alpha z + \beta$

$P(-i) = 0 \Leftrightarrow 2i^2 - \alpha i + \beta = 0 \Leftrightarrow -\alpha i + \beta = +2 \quad (1)$

$P(-3i) = -18 \Leftrightarrow 2\cdot 9i^2 - 3\alpha i + \beta = -18 \Leftrightarrow -3\alpha i + \beta = 0 \quad (2)$

$(1)-(2)$: $2\alpha i = +2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{+2}{2i}\cdot\frac{i}{i} = -i$

Dans (1) : $-1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 3$

Ainsi $P(z) = 2z^2 - iz + 3$.

Schéma de Horner :

	2	$-i$	3
$-i$		$-2i$	-3
	2	$-3i$	0

$P(z) = (z+i)(2z-3i)$

La 2^e racine de P est donc $\frac{3i}{2}$

Question 2

1) $A(1,2) \qquad d \equiv y=-1$

a) $M(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow d(M,A) = 2 \cdot d(M,d)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = 2 \cdot |y+1|$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2 = 4(y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2-4y+4-4y^2-8y-4=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 3y^2 - 12y = 0$$

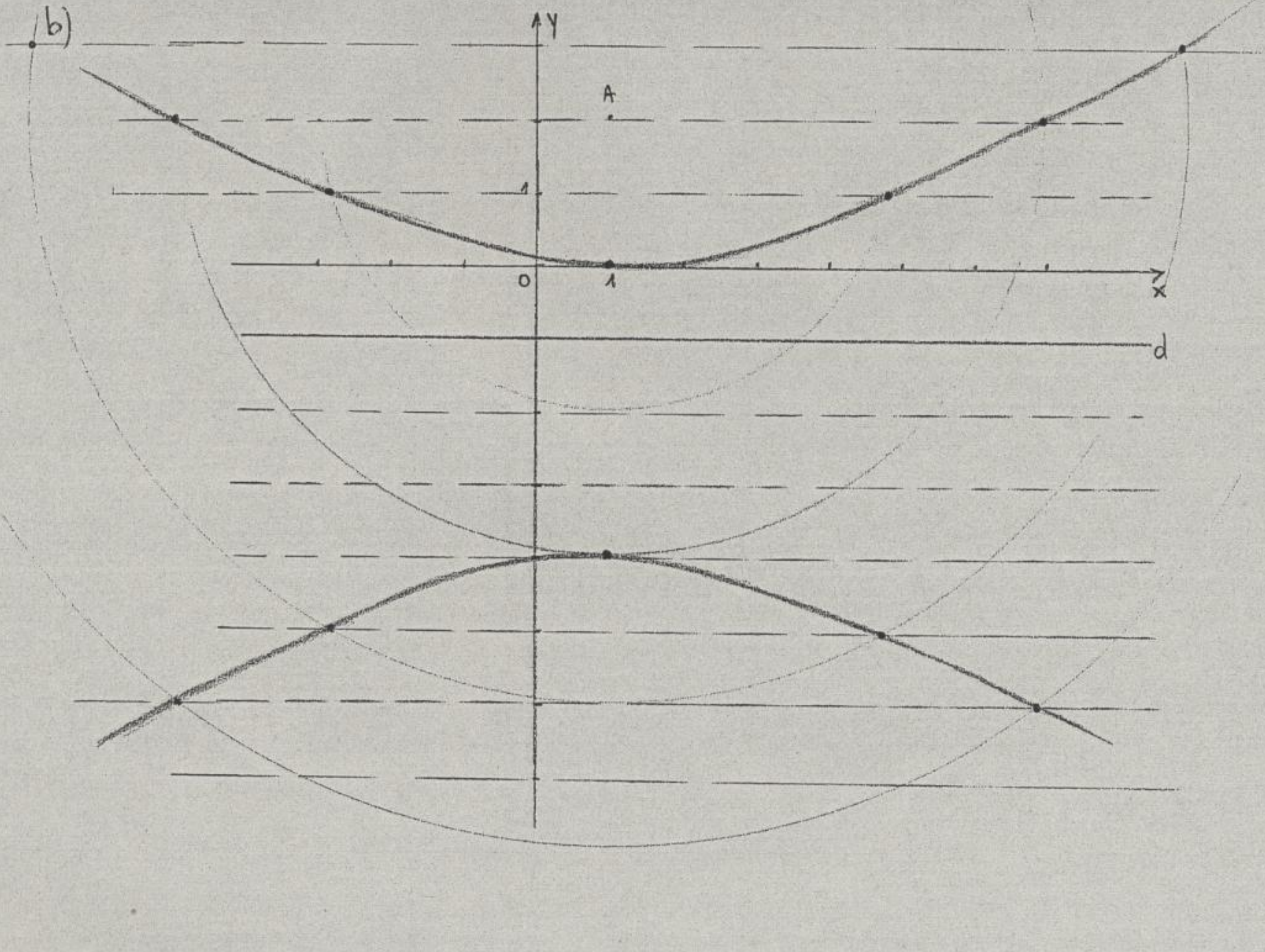
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 3(y^2+4y+4) = -12$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 3(y+2)^2 = -12$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

Γ est une hyperbole de foyer A, de directrice associée d, d'excentricité $\varepsilon = 2$.

b)



2) $y = 2 - \sqrt{-4x^2-8x} \Leftrightarrow \sqrt{-4x^2-8x} = 2-y$

CE : 1) $-4x^2-8x \geqslant 0 \Leftrightarrow -4x(x+2) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-2;0]$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-4x^2-8x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2) $2-y \geqslant 0 \Leftrightarrow y \leq 2$

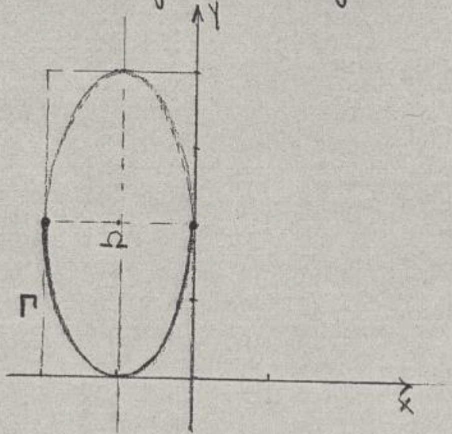
Elevons les 2 membres au carré :

$$-4x^2-8x = (2-y)^2 \Leftrightarrow -4(x^2+2x+1)-(2-y)^2 = -4$$
$$\Leftrightarrow -4(x+1)^2-(y-2)^2 = -4 \quad |:(-4)$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

Donc

$$\Gamma \equiv y = 2-\sqrt{-4x^2-8x} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \\ -2 \leq x \leq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

Γ est la moitié de l'ellipse de centre $\Omega(-1,2)$, d'axe focal $x=-1$ avec longueur du grand axe égale à 2 et longueur du petit axe égale à 1.



3) $\mathcal{P} \equiv y^2 = 2px \qquad F(\frac{p}{2},0) \qquad d \equiv x = -\frac{p}{2}$

$M_0(x_0,y_0) \in \mathcal{P}$, donc $y_0^2 = 2px_0$

Equation de la tangente à $\mathcal{P}$ en M_0 : $t \equiv y_0 y = px + px_0$

$T \in d \Leftrightarrow x_T = -\frac{p}{2}$

$T \in t \Leftrightarrow y_0 y_T = px_T + px_0 \Leftrightarrow y_0 y_T = -\frac{p^2}{2} + px_0 \Leftrightarrow y_T = -\frac{p^2}{2y_0} + \frac{px_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$, car $M_0 \notin Ox$)

a) $\overrightarrow{FM_0} \cdot \overrightarrow{FT} = (x_0 - \frac{p}{2}) \cdot (-\frac{p}{2} - \frac{p}{2}) + (y_0 - 0) \cdot (-\frac{p^2}{2y_0} + \frac{px_0}{y_0} - 0)$

$= (x_0 - \frac{p}{2}) \cdot (-p) + y_0 (\frac{-p^2}{2y_0} + \frac{px_0}{y_0})$

$= -x_0 p + \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{2} + px_0$

$= 0$!

donc $FM_0 \perp FT$

b) Pour construire la tangente à P en M_0

- on trace la perpendiculaire à FM_0 passant par F ; elle coupe d en T
- on trace la droite TM_0 qui est la tangente à P en M_0.

Question 3

1) Expérience aléatoire : tirer simultanément 4 cartes d'un jeu de 32 cartes

Evénement élémentaire : liste non ordonnée et sans répétition de 4 cartes

Tous les événements élémentaires sont équiprobables.

$$\# \Omega = C_{32}^{4} = \frac{32!}{28!\,4!} = 35960$$

a) A = évt « obtenir une main de 4 cartes contenant au moins un valet »

$\overline{A}$ = évt « obtenir une main de 4 cartes ne contenant aucun valet »

$$\# \overline{A} = C_{28}^{4} = \frac{28!}{24!\,4!} = 20475$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\# \overline{A}}{\# \Omega} = \frac{15485}{35960} = \frac{3097}{7192} \simeq 0{,}4306 \simeq 43{,}06\,\%$$

b) B = évt « obtenir une main de 4 cartes contenant au plus un valet »

$$\# B = \underbrace{C_{28}^{4}}_{\text{4 autres cartes}} + \underbrace{C_{4}^{1}}_{\text{1 valet}} \cdot \underbrace{C_{28}^{3}}_{\text{3 autres cartes}} = 20475 + 13104 = 33579$$

$$P(B) = \frac{\# B}{\# \Omega} = \frac{33579}{35960} \simeq 0{,}9338 \simeq 93{,}38\,\%$$

c) D = évt « obtenir une main de 4 cartes contenant un valet et un as exactement »

$$\# D = \underbrace{C_{4}^{1}}_{\text{1 valet}} \cdot \underbrace{C_{4}^{1}}_{\text{1 as}} \cdot \underbrace{C_{24}^{2}}_{\text{2 autres cartes}} = 4416$$

$$P(D) = \frac{\# D}{\# \Omega} = \frac{4416}{35960} = \frac{552}{4495} \simeq 0{,}1228 \simeq 12{,}28\,\%$$

d) E = évt « obtenir une main de 4 cartes contenant un valet et un pique exactement »

$$\# E = \underbrace{1}_{\text{valet de pique}} \cdot \underbrace{C_{21}^{3}}_{\text{3 autres cartes}} + \underbrace{C_{3}^{1}}_{\text{1 valet non pique}} \cdot \underbrace{C_{7}^{1}}_{\text{1 pique mais non le valet}} \cdot \underbrace{C_{21}^{2}}_{\text{2 autres cartes}}$$

$$= 1330 + 4410 = 5740$$

$$P(E) = \frac{\# E}{\# \Omega} = \frac{5740}{35960} = \frac{1435}{8990} = \frac{287}{1798} \simeq 0{,}1596 \simeq 15{,}96\,\%$$

2) Expérience aléatoire : lancer un dé 3 fois de suite

Evénement élémentaire : liste ordonnée et avec répétition de 3 nombres choisis dans l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$

Tous les événements élémentaires sont équiprobables.

$\# \Omega = 6^3 = 216$

La variable aléatoire X est le nombre de 5 ou 6 obtenus ; les valeurs prises par X sont 0, 1, 2, 3.

$P(X=0) = \frac{4^3}{6^3} = \frac{8}{27}$

$P(X=1) = \frac{2\cdot 4^2 \cdot 3}{6^3} = \frac{4}{9}$

$P(X=2) = \frac{2^2\cdot 4\cdot 3}{6^3} = \frac{2}{9}$

$P(X=3) = \frac{2^3}{6^3} = \frac{1}{27}$

ou bien :

$\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(n\,;p)$, avec : $\begin{cases} n=3 \\ p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \end{cases}$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p_i = P(X=x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

Espérance mathématique de X :

$E(X) = \sum p_i x_i = 0\cdot\frac{8}{27} + 1\cdot\frac{4}{9} + 2\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{27} = 1$

3) $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} C_8^k \,(3x^2)^{8-k}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{8} C_8^k \,(-1)^k\, 3^{8-k}\, x^{16-2k}\cdot x^{-k}$

$= \sum_{k=0}^{8} C_8^k\,(-1)^k\,3^{8-k}\,x^{16-3k}$

Le terme en x^{10} s'obtient pour : $16-3k=10 \Leftrightarrow -3k=-6 \Leftrightarrow k=2$

Le coefficient de x^{10} est donc égal à : $C_8^2\,(-1)^2\cdot 3^6 = \frac{8!}{6!2!}\,3^6 = 28\cdot 729 = 20412$

Question 4

a) $d \equiv y = tx$ et $C \equiv \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

$P \in d \Leftrightarrow y_P = t x_P \qquad (1)$

$P \in C \Leftrightarrow \left(x_P - \frac{1}{2}\right)^2 + y_P^2 = \frac{1}{4} \qquad (2)$

Remplaçons (1) dans (2) :

$\left(x_P-\frac{1}{2}\right)^2 + (t x_P)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_P^2 - x_P + \cancel{\frac{1}{4}} + t^2 x_P^2 = \cancel{\frac{1}{4}}$

$\Leftrightarrow (1+t^2)\,x_P^2 - x_P = 0 \quad |:x_P \neq 0$ car $P \neq 0$

$$\Leftrightarrow (1+t^2)x_P - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_P = \frac{1}{1+t^2}$$

Donc $y_P = t x_P = \frac{t}{1+t^2}$

$Q \in d \cap g \Leftrightarrow (y_Q = t x_Q \text{ et } x_Q = 1) \Leftrightarrow y_Q = t$

$$\vec{OM} = \vec{PQ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x_Q - x_P = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} \\ y_M = y_Q - y_P = t - \frac{t}{1+t^2} = \frac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$

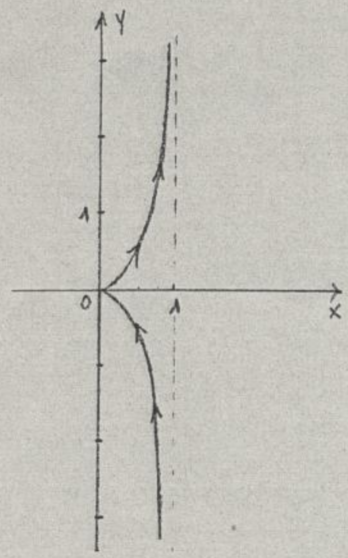
$$\text{Donc } \Gamma \equiv \begin{cases} x = \frac{t^2}{1+t^2} = f(t) \\ y = \frac{t^3}{1+t^2} = h(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b) $f(-t) = f(t)$ et $h(-t) = -h(t)$

Donc Γ est symétrique par rapport à Ox.

c)

t	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(t)$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{10}$
$h(t)$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{27}{10}$



d) $d \equiv y = tx$, donc $t = \frac{y}{x}$ si $x \neq 0$

Remplaçons $t = \frac{y}{x}$ dans $x = \frac{t^2}{1+t^2}$:

$$x = \frac{\frac{y^2}{\cancel{x^2}}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{\cancel{x^2}}{x^2+y^2} \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{x^2+y^2} \Leftrightarrow x(x^2+y^2) = y^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 + xy^2 = y^2 \Leftrightarrow y^2(1-x) = x^3 \quad (E)$$

Si $x = 0$, alors $t = 0$ et $y = 0$

Donc $O(0,0) \in \Gamma$

L'équation (E) est aussi vérifiée par les coordonnées de ce point.

Donc $\Gamma \equiv y^2(1-x) = x^3$