Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2006

Section: B

Branche: Mathématiques I

Nom et prénom du candidat

____

____

Question I : *(Les parties 1), 2) et 3) sont indépendantes.)*

1) Dans le champ des complexes, on donne $z' = \dfrac{2z-3i}{iz-6}$ avec $z = x + yi$, $z \in \mathbb{C} - \{-6i\}$.

Déterminer et représenter dans le plan de Gauss les ensembles suivants :

$E_1 = \left\{ M(z) / z \in \mathbb{C} - \{-6i\} \;\; et \;\; z' \in \mathbb{R} \right\}$ et $E_2 = \left\{ M(z) / z \in \mathbb{C} - \{-6i\} \;\; et \;\; z' \in i\mathbb{R} \right\}$

2) Soit le nombre complexe $z = \sqrt{6 - 3\sqrt{2}} - i\sqrt{6 + 3\sqrt{2}}$.

a) Calculer z^4 sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

b) En déduire la forme trigonométrique de z.

c) Déterminer la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

3) On considère le polynôme à coefficients complexes $P(z) = 2z^2 + \alpha z + \beta$.

Déterminer les coefficients α et β sachant que $-i$ est une racine de P et que le reste de la division de P par z+3i est -18. Déterminer ensuite la 2^e racine de P.

(5+7+3=15points)

Question II : *(Les parties 1), 2) et 3) sont indépendantes.)*

Le plan est muni du repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) On donne le point A(1,2) et la droite $d \equiv y = -1$.

Soit Γ le lieu des points du plan dont la distance à A vaut 2 fois leur distance à d.

a) Déterminer une équation cartésienne de Γ et déterminer la nature de Γ.

b) Construire Γ en utilisant sa définition focale.

2) Identifier et dessiner dans le repère orthonormé la courbe d'équation cartésienne $y = 2 - \sqrt{-4x^2 - 8x}$.

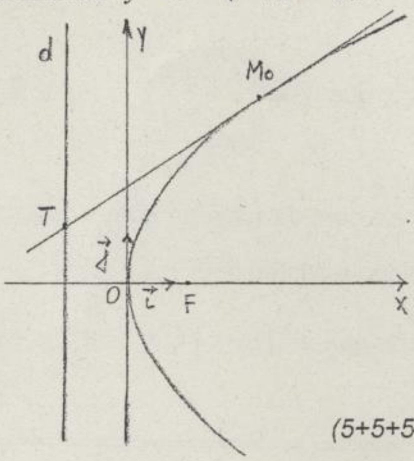
3) Soit la parabole $P \equiv y^2 = 2px$ où p>0, de foyer F et de directrice d.

Soit $M_0(x_0,y_0)$ un point de *P* n'appartenant pas à l'axe focal de *P*.

La tangente en M_0 à *P* coupe d en T.

a) Calculer $\overline{FM_0} \cdot \overline{FT}$ et montrer que FM_0 est perpendiculaire à FT.

b) En déduire une construction simple de la tangente en M_0 à *P*.



(5+5+5=15 points)

Epreuve écrite

Examen de fin d'études secondaires 2006

Section: B

Branche: Mathématiques I

Nom et prénom du candidat

____

____

Question III : *(Les parties 1), 2) et 3) sont indépendantes.)*

1) On dispose d'un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir une main de 4 cartes contenant

a) au moins un valet,

b) au plus un valet,

c) un valet et un as exactement,

d) un valet et un pique exactement.

2) On lance un dé 3 fois de suite. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque triplet ainsi obtenu associe le nombre de 5 ou 6 obtenus. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique de X.

3) Calculer le terme en x^{10} dans $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$.

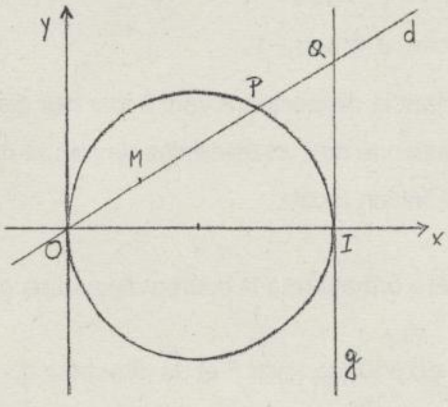
(8+5+2=15 points)

Question IV :

Dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [OI] et g la tangente en I à $\mathcal{C}$.

Une droite variable d de pente t passant par O coupe $\mathcal{C}$ également en P (P≠O) et g en Q.

On définit le point M par l'égalité $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$. On note Γ le lieu des points M lorsque d varie.



a) Montrer que $\Gamma \equiv \begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

b) Quel élément de symétrie admet cette courbe ?

c) Dessiner la courbe pour $t \in [-3;3]$.

d) Montrer que $y^2(1-x) = x^3$ est une équation cartésienne de Γ.

(7+1+3+4=15 points)