Épreuve écrite: Corrigé

Examen de fin d'études secondaires 2010

Section: D

Branche: Statistique et probabilités

CORRIGÉ

Exercice 1: Éléments de statistique descriptive [15 p.]

Le tableau suivant informe sur la répartition des exploitations agricoles d'une région selon la surface en hectares.

Surface en hectares	Nombre d'exploitations
[0; 20[	15
[20; 40[	21
[40; 60[	54
[60; 80[	40
[80; 100[	33
[100; 120[	22
[120; 140[	10
[140; 160[	5

Travail à faire:

a. Calculez la moyenne arithmétique par changement d'origine et d'échelle. [3 p.]
b. Calculez la médiane. [4 p.]
c. Calculez l'écart-type par changement d'origine et d'échelle. [4 p.]
d. Calculez le pourcentage de l'effectif compris dans l'intervalle [45; 105]. [4 p.]

Surface en hectares	Effectif n_i	Centre de classe x_i	Effectifs cumulés croissants $\sum n_i \uparrow$	$z_i = \frac{x_i - x_0}{a}$	$n_i \cdot z_i$	$n_i \cdot z_i^2$
[0;20[	15	10	15	-2	-30	60
[20;40[	21	30	36	-1	-21	21
[40;60[	54	50	90	0	0	0
[60;80[	40	70	130	1	40	40
[80;100[	33	90	163	2	66	132
[100;120[	22	110	185	3	66	198
[120;140[	10	130	195	4	40	160
[140;160[	5	150	200	5	25	125
	200				186	736

a. $\overline{X} = x_0 + a \cdot \overline{z}$

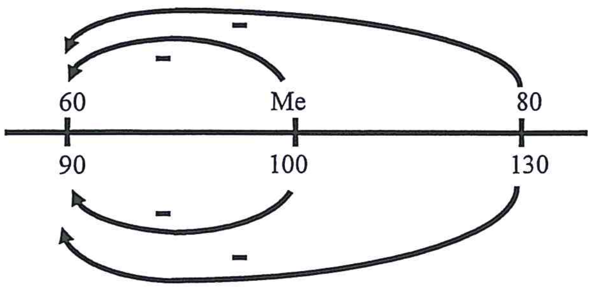
avec $\overline{z} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot z_i = 186 \div 200 = 0{,}93$

$\overline{X} = 50 + 20 \cdot 0{,}93$

$\overline{X} = 50 + 18{,}6$

$\overline{X} = 68{,}6$ hectares

b. Médiane ou Q_2 ou valeur de rang $\frac{N}{2} = \frac{200}{2} = 100$



$$\frac{80-60}{130-90} = \frac{Me-60}{100-90}$$

$$\frac{20}{40} = \frac{Me-60}{10}$$

$$20 \cdot 10 = 40 \cdot (Me - 60)$$
$$200 = 40 \cdot Me - 2.400$$
$$40 \cdot Me = 200 + 2.400$$
$$Me = \frac{2.600}{40} = 65$$

c. $$\sigma_X^2 = a^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{n}(n_i \cdot z_i^2)\right) - \bar{z}^2\right]$$

$$\sigma_X^2 = 20^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{200} \cdot 736\right) - (0{,}93)^2\right]$$
$$= 400 \cdot (3{,}68 - 0{,}8649)$$
$$= 400 \cdot 2{,}8151$$
$$= 1.126{,}04$$

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$
$$= \sqrt{1.126{,}04}$$
$$= 33{,}55651949$$
$$\approx 33{,}56$$

d. Calculer le pourcentage de l'effectif compris dans l'intervalle [45; 105].

Nombre théorique des valeurs comprises entre 45 et 105:

$$\frac{54 \cdot 15}{20} + 40 + 33 + \frac{22 \cdot 5}{20} = 40{,}5 + 40 + 33 + 5{,}5 = 119$$

Pourcentage du nombre total d'observations comprises entre 45 et 105:

$$\frac{119}{200} = 0{,}595 = 59{,}5\ \%$$

Exercice 2: Régression et corrélation [12 p.]

Le tableau suivant donne les notes finales en "Sociétés Commerciales" et en "Statistique et probabilités" obtenues par 8 élèves choisis au hasard parmi un vaste ensemble d'élèves.

Élève	Sociétés commerciales (x_i)	Statistique et probabilités (y_i)
1	51	42
2	37	34
3	34	28
4	42	43
5	31	30
6	25	22
7	36	32
8	48	41

Travail à faire:

a. Établissez l'équation d'ajustement linéaire (méthode des moindres carrés). [8 p.]

b. Représentez graphiquement cette droite dans le nuage de points. [4 p.]

ad. a. Établir l'équation d'ajustement linéaire (méthode des moindres carrés).

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - (n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (n \cdot \overline{x}^2)} \quad \text{et } \beta = \overline{y} - \alpha \cdot \overline{x} \; \Rightarrow \text{Droite ajustée: } y = \alpha \cdot x + \beta$$

Élève	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
1	51	42	2.142	2.601
2	37	34	1.258	1.369
3	34	28	952	1.156
4	42	43	1.806	1.764
5	31	30	930	961
6	25	22	550	625
7	36	32	1.152	1.296
8	48	41	1.968	2.304
	$\overline{x} = 38$	$\overline{y} = 34$	10.758	12.076

$$\alpha = \frac{10.758 - (8 \cdot 38 \cdot 34)}{12.076 - (8 \cdot 38^2)} = \frac{422}{524} = 0{,}805343512 \approx 0{,}8053$$

$\beta = 34 - 0{,}805343512 \cdot 38 = 3{,}396946560 \approx 3{,}3969$

Nous savons que $y = \alpha \cdot x + \beta$ donc $\boxed{y = 0{,}8053 \cdot x + 3{,}3969}$

ou

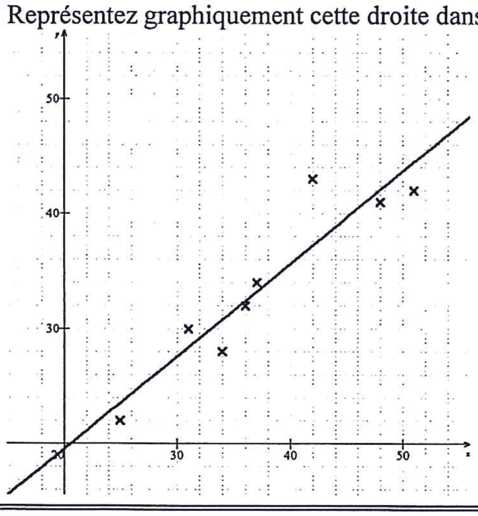
Élève	x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$y_i - \overline{y}$	$(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})$	$(x_i - \overline{x})^2$
1	51	42	13	8	10	169
2	37	34	-1	0	0	1
3	34	28	-4	-6	24	16
4	42	43	4	9	36	16
5	31	30	-7	-4	28	49
6	25	22	-13	-12	156	169
7	36	32	-2	-2	4	4
8	48	41	10	7	70	100
	$\overline{x} = 38$	$\overline{y} = 34$			422	524

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y}) \right]}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{422}{524} = 0{,}805343512 \approx 0{,}8053$$

$\beta = 34 - 0{,}805343512 \cdot 38 = 3{,}396946560 \approx 3{,}3969$

Nous savons que $y = \alpha \cdot x + \beta$ donc $\boxed{y = 0{,}8053 \cdot x + 3{,}3969}$

ad. b. Représentez graphiquement cette droite dans le nuage de points.



Exercice 3: Éléments du calcul des probabilités [23 p.]

Exercice 3.1. [12 p.]

Dans une tirelire, il y a six pièces de 50 centimes, sept pièces de 1 euro et huit pièces de 2 euros. Vous recevez six pièces prises au hasard dans cette tirelire.
Quelle est la probabilité

a. que vous recevez deux pièces de chaque sorte? [2 p.]

$$\frac{C_6^2 \cdot C_7^2 \cdot C_8^2}{C_{21}^6} = \frac{15 \cdot 21 \cdot 28}{54.264} = \frac{8.820}{54.264} = \frac{105}{646} = 0{,}1625387 \approx 0{,}1625$$

b. que la moitié des pièces que vous recevez sont des pièces de 50 centimes? [2 p.]

$$\frac{C_6^3 \cdot C_{15}^3}{C_{21}^6} = \frac{20 \cdot 455}{54.264} = \frac{9.100}{54.264} = \frac{325}{1.938} = 0{,}167698658 \approx 0{,}1677$$

c. que vous recevez au moins deux pièces de 50 centimes? [3 p.]

$$1 - \left(\frac{C_6^0 \cdot C_{15}^6}{C_{21}^6} + \frac{C_6^1 \cdot C_{15}^5}{C_{21}^6}\right) = 1 - \left(\frac{5.005}{54.264} + \frac{6 \cdot 3.003}{54.264}\right) = 1 - \frac{23.023}{54.264} = \frac{31.241}{54.264} = \frac{4.463}{7.752}$$

$$= 0{,}575722394 \approx 0{,}5757$$

d. que vous recevez une somme de 6 euros? [5 p.]

(4 × "0,5 €") + (2 × "2 €") = 6 € (avec 6 pièces de monnaie)
ou (2 × "0,5 €") + (3 × "1 €") + (1 × "2 €") = 6 € (avec 6 pièces de monnaie)
ou (6 × "1 €") = 6 € (avec 6 pièces de monnaie)

$$\frac{C_6^4 \cdot C_7^0 \cdot C_8^2}{C_{21}^6} + \frac{C_6^2 \cdot C_7^3 \cdot C_8^1}{C_{21}^6} + \frac{C_6^0 \cdot C_7^6 \cdot C_8^0}{C_{21}^6} = \frac{15 \cdot 28}{54.264} + \frac{15 \cdot 35 \cdot 8}{54.264} + \frac{7}{54.264} = \frac{4.627}{54.264} = \frac{661}{7.752}$$

$$= 0{,}085268318 \approx 0{,}0853$$

Exercice 3.2. [5 p.]

Dans un club sportif, quinze garçons, dont Alain et Bob, jouent au football; l'entraînement est fait de telle sorte que chaque garçon est capable d'occuper n'importe quel poste.
Pour former une équipe, on tire au sort onze joueurs parmi les quinze joueurs du club.
Quelle est la probabilité:

a. qu'Alain est dans l'équipe? [1 p.]

$$P(\text{«Alain est dans l'équipe»}) = P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}} = \frac{11}{15} = 0{,}733333333 \approx 0{,}7333$$

b. qu'on sélectionne Alain et Bob? [2 p.]

Calculons la probabilité de l'événement «Alain et Bob sont dans l'équipe»: $P(A \cap B)$
Pour cela, il faut tout d'abord que l'un d'entre eux soit dans l'équipe (probabilité de 11/15), et ensuite que l'autre le soit aussi (probabilité qui devient alors de 10/14).
On obtient:

$$P(A \cap B) = \frac{11}{15} \times \frac{10}{14} = \frac{11}{21} = 0{,}523809524 \approx 0{,}5238$$

c. qu'on sélectionne Alain ou Bob? [2 p.]

Calculons la probabilité de l'événement «Alain ou Bob sont dans l'équipe»: $P(A \cup B)$

$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{11}{15} + \frac{11}{15} - \frac{11}{21} = \frac{33}{35} = 0{,}942857143 \approx 0{,}9429$$

Exercice 3.3. [6 p.]

D'un jeu de 32 cartes (comprenant les cartes 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As) on en tire 4. Quelle est la probabilité

a. de tirer au moins une carte rouge en 4 tirages sans remise? [2 p.]

$$P(A) = 1 - \frac{C_{16}^{0} \bullet C_{16}^{4}}{C_{32}^{4}} = 1 - \frac{1.820}{35.960} = \frac{1.707}{1.798} = 0{,}949388209 \approx 0{,}9494$$

b. de tirer 3 cœurs et 2 rois en 4 tirages sans remise? [4 p.]

2 rois + 3 cœurs (sans le roi de cœur) = 5 cartes

Or on ne tire que 4 cartes. D'où il faut qu'une des cartes cœur soit le roi de cœur.

$$\text{D'où } P(B) = \frac{C_1^1 \bullet C_3^1 \bullet C_7^2 \bullet C_{21}^0}{C_{32}^4} = \frac{1 \bullet 3 \bullet 21 \bullet 1}{35.960} = \frac{63}{35.960} = 0{,}001751947 \approx 0{,}0018$$

Exercice 4: Les variables aléatoires [10 p.]

Une urne contient dix boules dont une porte le numéro 1, quatre portent le numéro 2 et cinq portent le numéro 3. On en extrait successivement deux boules sans remettre la première et on multiplie les deux numéros tirés pour définir la variable aléatoire X qui prend les valeurs des produits ainsi obtenus.

a. Établissez la loi de probabilité. [8 p.]

P(produit = 2) ⇨ (❶;❷) ou (❷;❶)

$$= \left(\frac{C_1^1}{C_{10}^1} \cdot \frac{C_4^1}{C_9^1}\right) + \left(\frac{C_4^1}{C_{10}^1} \cdot \frac{C_1^1}{C_9^1}\right) = \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{90}$$

P(produit = 3) ⇨ (❶;❸) ou (❸;❶)

$$= \left(\frac{C_1^1}{C_{10}^1} \cdot \frac{C_5^1}{C_9^1}\right) + \left(\frac{C_5^1}{C_{10}^1} \cdot \frac{C_1^1}{C_9^1}\right) = \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{5}{10} \cdot \frac{1}{9}\right) = \frac{10}{90}$$

P(produit = 4) ⇨ (❷;❷)

$$= \left(\frac{C_4^1}{C_{10}^1} \cdot \frac{C_3^1}{C_9^1}\right) = \left(\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}\right) = \frac{12}{90}$$

P(produit = 6) ⇨ (❷;❸) ou (❸;❷)

$$= \left(\frac{C_4^1}{C_{10}^1} \cdot \frac{C_5^1}{C_9^1}\right) + \left(\frac{C_5^1}{C_{10}^1} \cdot \frac{C_4^1}{C_9^1}\right) = \left(\frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}\right) = \frac{40}{90}$$

P(produit = 9) ⇨ (❸;❸)

$$= \left(\frac{C_5^1}{C_{10}^1} \cdot \frac{C_4^1}{C_9^1}\right) = \left(\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}\right) = \frac{20}{90}$$

Loi de probabilité:

x_i	2	3	4	6	9
p_i	$\frac{8}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{40}{90}$	$\frac{20}{90}$

b. Calculez l'espérance mathématique. [2 p.]

$$E(X) = 2 \cdot \frac{8}{90} + 3 \cdot \frac{10}{90} + 4 \cdot \frac{12}{90} + 6 \cdot \frac{40}{90} + 9 \cdot \frac{20}{90} = \frac{16 + 30 + 48 + 240 + 180}{90} = \frac{514}{90} = \frac{257}{45} = 5{,}711111111 \approx 5{,}7111$$