EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024 **QUESTIONNAIRE**							
Date :	23.09.24		*Horaire :*	08:15 - 10:15		*Durée :*	120 minutes
Discipline :	MATHE	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	GSO		
					Numéro du candidat :		

Sauf mention contraire, les résultats sont arrondis à trois chiffres significatifs.

Question 1 **(3 + 3 = 6 points)**

Résoudre algébriquement les équation et inéquation sur le domaine indiqué :

1) $\ln(x+2)+\ln(x-1)=2\cdot\ln x$ $\qquad D =]1;+\infty[$
2) $e^{x^2+2x}\leq e^3$ $\qquad D=\mathbb{R}$

Question 2 **(3 points)**

Écrire l'expression ci-dessous en fonction de $\ln(3)$. Détailler les calculs !

$$A=-2-\ln\left(\frac{81}{e^2}\right)$$

Question 3 **(2 + 2 + 1 + 1 + 2 = 8 points)**

Une entreprise vend entre 50 et 300 théières par jour.

Le bénéfice quotidien, en milliers d'euros, lorsque l'entreprise vend x centaines de théières, est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}5\,;3]$ par

$$f(x)=\ (0{,}22\,x^2-1{,}58\,x+3)\cdot e^x$$

Dans toutes les questions, le nombre de théières est à arrondir à l'unité près et le bénéfice à l'euro près.

1) Quel est le bénéfice quotidien réalisé par l'entreprise le jour où elle vend 100 théières, soit une centaine ?
2) A partir de combien de théières vendues est-ce que l'entreprise fait un bénéfice quotidien supérieur ou égal à $4\ 000$ € ?
3) En tenant compte de la capacité de production journalière de l'entreprise, pour combien de théières vendues est-ce que le bénéfice quotidien est maximal ?
4) Quel est ce bénéfice quotidien maximal ?
5) Détermine le pourcentage d'évolution du bénéfice quotidien (avec une précision de 3 chiffres significatifs) si le nombre de théières vendues augmente de 150 à 200 théières par jour.

<u>Question 4</u> **(2 + 3 + 3 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 = 15 points)**

34% de la population luxembourgeoise sont des jeunes de moins de 30 ans.

Dans un article du *Paperjam*, on affirme que

- 72% des Luxembourgeois de moins de 30 ans sont aujourd'hui convaincus que leur comportement individuel peut avoir un impact sur le changement climatique.
- 43% des Luxembourgeois âgés de 30 ans ou plus pensent que leur comportement individuel n'a pas d'influence sur le changement climatique.

On choisit une personne au hasard.

On note les évènements :

M : « la personne choisie est un Luxembourgeois de moins de 30 ans. »

C : « la personne choisie est d'avis que son comportement individuel peut avoir une influence sur le changement climatique. »

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.
2) Montrer que $P(C) = 0{,}621$, puis interpréter ce résultat.

On interroge au hasard 120 Luxembourgeois (de tout âge).

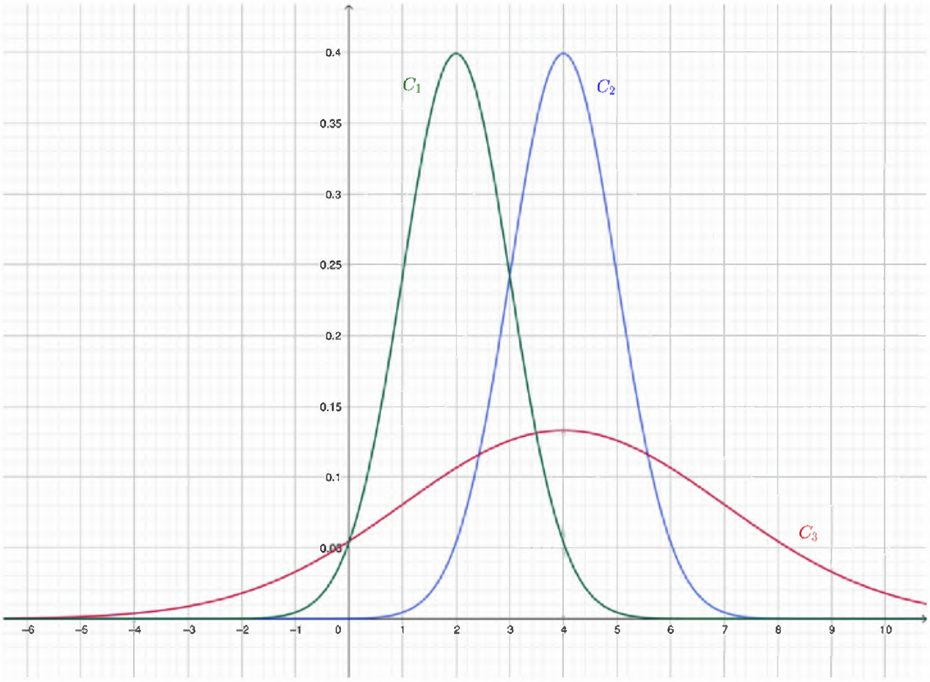
On suppose que la population est suffisamment grande pour que ces choix soient assimilés à des tirages indépendants avec remise.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de Luxembourgeois de cet échantillon qui sont d'avis que leur comportement individuel peut avoir un impact sur le changement climatique.

3) Justifier que X suit une loi binomiale dont il faut préciser les paramètres.
4) Combien de Luxembourgeois peut-on espérer trouver dans cet échantillon qui sont d'avis que leur comportement individuel a un impact sur le changement climatique ?
   Donner une valeur approchée à l'unité près.
5) Calculer la probabilité d'avoir au plus 80 personnes dans ce groupe qui sont d'avis que leur comportement individuel peut avoir un impact sur le changement climatique.
6) Calculer $P(X \geq 70)$ et interpréter dans le contexte de l'exercice
7) Déterminer l'intervalle de fluctuation I au seuil de 95% du nombre de personnes qui sont d'avis que leur comportement individuel peut avoir un impact sur le changement climatique.
8) On sait que dans un petit village luxembourgeois de 120 habitants, 81 personnes sont d'avis que leur comportement individuel peut avoir un impact sur le climat. Est-ce que cet échantillon est représentatif de la population du Luxembourg ? Justifier.

Question 5 **(3 points)**

Associer les distributions des lois normales $\mathcal{N}(4;1^2)$, $\mathcal{N}(2;1^2)$ et $\mathcal{N}(4;3^2)$ aux trois courbes ci-dessous en justifiant :



Question 6 **(1 + 1 + 2 + 1 + 3 = 8 points)**

Une entreprise fabrique des pièces de rechange pour une machine particulière utilisée dans l'industrie.

La longueur, en mm, de ces pièces est modélisée par la variable aléatoire X. On sait que X suit une loi normale d'espérance $\mu = 400\ mm$ et d'écart-type $\sigma = 5\ mm$.

Au contrôle, une pièce est déclarée conforme si sa longueur est comprise strictement entre $393\ mm$ et $407\ mm$.

1) Déterminer la probabilité qu'une pièce ait une longueur inférieure ou égale à $390\ mm$.
2) Déterminer la probabilité qu'une pièce soit déclarée conforme.
3) Déterminer, sans calculatrice, la probabilité que la longueur de la pièce soit supérieure ou égale à $4\ dm$. Justifier la réponse.
4) Le gérant de l'entreprise n'est pas satisfait de la production. Il veut changer les réglages de la machine de production de sorte que la probabilité qu'une pièce soit déclarée conforme est 96%.

   En changeant les réglages de la machine, la valeur de μ reste inchangée, mais la valeur de σ peut être modifiée.

   On note Y la variable aléatoire égale à $\frac{X-\mu}{\sigma}$.

a) Quelle loi la variable aléatoire Y suit-elle ?
b) Déterminer la valeur de σ au centième près pour que le gérant soit satisfait de la production.

Question 7 **(1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 = 10 points)**

Le tableau ci-dessous montre la production d'énergie électrique, en térajoules (TJ), générée par des installations photovoltaïques au Luxembourg de 2015 à 2022.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Rang de l'année (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Production d'énergie électrique en TJ (y_i)	373	361	391	431	469	581	649	995

(Source : Statec)

Partie A : Ajustement affine

1) Justifier à l'aide du coefficient de corrélation qu'un ajustement affine est valable.
2) Donner une équation de la droite de régression de y en x.
3) Quelle serait, d'après ce modèle, la production d'énergie électrique générée en 2025 ? Donner une valeur approchée à l'unité près.

Partie B : Ajustement exponentiel

On pose $z = \ln(y)$.

4) Compléter le tableau suivant.

Rang de l'année (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7
Production d'énergie électrique en TJ (y_i)	373	361	391	431	469	581	649	995
$z_i = \ln(y_i)$								

5) Donner l'équation de la droite de régression de z en fonction de x.
6) En déduire un ajustement de y en fonction de x sous la forme $y = ke^{ax}$ (avec k et a des réels).
7) La consommation totale d'énergie électrique (toutes sources) en 2022 était d'environ 22000 TJ.
   En supposant que cette consommation reste constante, déterminer, à l'aide de ce modèle, durant quelle année cette quantité d'énergie électrique pourra être générée exclusivement par des installations photovoltaïques ?

Question 8 **(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 7 points)**

On veut étudier une dépendance éventuelle entre le type de fracture et l'apparition de complications. Pour cela, on dispose des données suivantes, relevées chez 165 patients:

	Pas de complications	Complications apparues	Total
Fractures fermées	113	23	136
Fractures ouvertes	19	10	29
Total	132	33	165

1) On choisit un patient au hasard dans cet échantillon.

   On note les évènements suivants :

   F « le patient a une fracture fermée. »

   O « le patient a une fracture ouverte. »

   C « le patient a eu des complications lors de la guérison. »

   a) Déterminer la probabilité que le patient ait une fracture ouverte et que des complications soient apparues lors de la guérison.
   b) Déterminer la probabilité que le patient n'ait pas eu de complications, sachant qu'il a une fracture fermée.

On réalise un test du χ^2 au seuil de signification $\alpha = 5\%$.

2) Énoncer l'hypothèse H_0.
3) Énoncer l'hypothèse alternative H_1.
4) Combien vaut la p-valeur ?
5) Conclure dans le contexte