EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024							
QUESTIONNAIRE							
Date :	07.06.24		*Horaire :*	08:15 - 10:15		*Durée :*	120 minutes
Discipline :	MATHE	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	GSO		
						Numéro du candidat :	

***Sauf indications contraires**, pour l'ensemble du questionnaire, arrondir les résultats à trois chiffres significatifs.*

Question 1 **[3,5+4] + 2,5 = 10 points**

1.1. Résoudre algébriquement les équations et les inéquations suivantes sur le domaine indiqué :

a. $e^{2x^2-2} \leq e^6$ $D = \mathbb{R}$

b. $ln(x-1) + ln(2x) = ln(x^2)$ $D =]1; +\infty[$

1.2. Simplifier l'expression suivante de manière à obtenir une fraction. Détailler le calcul :

$A = e^{2ln(3)-3ln(2)}$

Question 2 **1+1+2+2+2 = 8 points**

Arnd Leike, physicien allemand s'est intéressé à la disparition de la mousse dans un verre de bière juste servi. Il a pu montrer que sa hauteur suit une loi exponentielle au cours des premières minutes. Lors d'une expérience de ce type, la fonction f définie par

$$f(t) = 2\,e^{-0{,}2\,t}$$

donne la hauteur (en cm) de la mousse dans un verre de bière en fonction du nombre de minutes t écoulées depuis le moment où la boisson a été versée.

Dans cet exercice, donner les temps demandés en nombres entiers de minutes.

2.1. Quelle est la hauteur de la mousse en cm au moment où le verre vient juste d'être rempli ?

2.2. Calculer $f(10)$. Donner ce résultat en millimètres (nombre entier) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

2.3. Après combien de temps considère-t-on que la bière est plate (la bière est considérée comme plate s'il reste moins d'un millimètre) ?

2.4. Après combien de temps a-t-on moins que la moitié de la hauteur initiale de mousse ?

2.5. De quel pourcentage, la hauteur de mousse diminue-t-elle entre la 2$^{\text{ème}}$ et la 5$^{\text{ème}}$ minute ?

Question 3 **1+1+1+2+1+1+2+2 = 11 points**

Selon la source Statec.lu, la population luxembourgeoise a augmenté au cours de ces dernières décennies. Le tableau suivant reprend les données depuis 1950.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Rang de la décennie (x_i)	0	1	2	3	4	5	6
Population en milliers (y_i)	295	314	339	364	382	436	507

Partie A :

3.1 Justifier à l'aide du coefficient de corrélation qu'un ajustement affine est valable.

3.2 Donner une équation de la droite de régression de y en x.

3.3 Selon ce modèle, quelle devait être la population du Grand-Duché de Luxembourg en 2020 ?

Partie B :

3.4 Compléter sur cette feuille le tableau ci-dessous.

Rang de la décennie	0	1	2	3	4	5	6
Population en milliers	295	314	339	364	382	436	507
$z_i = ln(y_i)$							

3.5 Déterminer une droite de régression de z en x.

3.6 Sur base du résultat obtenu au point précédent, déterminer un ajustement de y en x sous la forme $y = k\, e^{a\, x}$ (avec a et k des réels).

3.7 Selon ce modèle, quelle devait être la population du Grand-Duché de Luxembourg en 2020 ? Quel modèle semble donc le plus approprié, sachant qu'en 2020, il y avait environ 629 000 résidents au pays ? Justifier.

3.8 Déterminer au cours de quelle décennie, on atteindra le million de personnes résidentes, selon ce modèle.

Question 4 **2+1+1+2+2+1+2+1+2 = 14 points**

L'angine est une maladie qui peut être soit d'origine virale (70% des cas) soit bactérienne. On considère que ces deux origines ne se rencontrent pas simultanément.

Pour déterminer l'origine d'une angine, il existe un test qu'il est important de réaliser car seules les angines bactériennes se soignent par antibiotiques. Si l'angine est bactérienne, le test est positif dans 80% des cas. Si l'angine est virale, alors le test est négatif dans 90% des cas.

On choisit un malade au hasard et on considère les événements suivants :

- B : « L'angine du malade est bactérienne ».
- T : « Le test de dépistage effectué est positif ».

4.1 Représenter la situation par un arbre pondéré.

4.2 On administre un antibiotique dans le cas d'un test positif. Quelle est la probabilité que le malade reçoive un antibiotique à bon escient (avoir une personne souffrant d'une angine bactérienne et ayant obtenu un test positif) ?

4.3 Montrer que la probabilité d'obtenir un test positif vaut 0,31.

4.4 Calculer $P_T(B)$ et interpréter ce résultat dans ce contexte.

Lors d'une épidémie d'angines, de manière à anticiper le futur, un groupe témoin de 400 patients touchés par une angine a été examiné. On nomme X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes à qui un antibiotique a été administré (toute personne avec un test positif). On suppose que le nombre de personnes est suffisamment grand pour que les choix soient assimilés à des tirages indépendants et avec remise.

4.5 Quelle est la loi suivie par X ? Justifier et en préciser les paramètres.

4.6 Au sein de ce groupe, à combien de personnes faut-il s'attendre à donner un antibiotique ?

4.7 Calculer $P(X > 120)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.

4.8 Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% du nombre de personnes ayant un test positif au sein de ce panel de 400 personnes.

4.9 Plus tard, le même hôpital a étudié 400 autres cas d'angine et a administré des antibiotiques à 160 personnes. Ce nouvel échantillon est-il représentatif de la situation antérieure ? Justifier.

Question 5 **1+1+2+1+3+2 = 10 points**

Partie A :

J'ai acheté un lave-vaisselle de marque Topclean. D'après le fabriquant, cet appareil a une durée de vie qui est modélisée par la variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ = 105 mois et d'écart-type σ = 15 mois.

5.1 Calculer la probabilité que mon lave-vaisselle dure moins de 5 ans (60 mois).

5.2 Sachant que cet appareil a été acheté en mars 2024, calculer la probabilité qu'il soit encore en service après mars 2034.

5.3 Quelle est la durée de vie maximale de mon lave-vaisselle si je fais partie des 10% de clients les plus malchanceux ? Donner une valeur arrondie à l'unité près.

Partie B :

Au sein de la marque Overclean, on soutient que leurs appareils électroménagers sont d'une qualité supérieure. Leur durée de vie est modélisée par la variable aléatoire Y suivant une loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ' = 20 mois.

On note $Z = \frac{Y-\mu'}{20}$.

5.4 Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

5.5 On sait que 83% de ces appareils durent plus de 8 ans. Montrer par calculs qu'à l'unité près, l'espérance μ' de Y vaut 115.

5.6 Pour ce point, on continue avec μ' = 115. En règle générale, un client se sent lésé si son appareil dure moins de 7 ans. Chez Overclean, ils affirment avoir un meilleur taux de satisfaction que chez TopClean. Est-ce correct ? Justifier.

Question 6 **[1+1] + [1+1+1+2] = 7 points**

En 2016, les britanniques préparaient le Brexit et ont appelé la population aux urnes pour un referendum. Celui-ci visait à déterminer si elle était favorable ou non au fait de quitter l'Union Européenne. Les résultats ont surpris la communauté internationale. Le tableau suivant reprend, par tranche d'âge, le nombre de personnes (en centaines de milliers de personnes) s'étant prononcées en faveur ou en défaveur du Brexit.

Événement / tranche d'âge	**Contre le Brexit (IN : I)**	**Pour le Brexit (OUT : $\overline{I}$)**	**Total**
A : 18 – 24 ans	25	13	38
B : 25 – 49 ans	81	74	155
C : 50 – 64 ans	38	52	90
D : + de 65 ans	32	52	84
Total	176	191	367

a) On choisit une personne au hasard parmi cette population.

On note I l'événement « choisir une personne contre le Brexit ».

Les événements relatifs aux âges sont décrits dans le tableau ci-dessus (A, B, C et D).

6.1 Quelle est la probabilité que cette personne fasse partie de la tranche d'âge 25-49 et qu'elle ait voté contre le Brexit ?

6.2 Quelle est la probabilité que cette personne ait plus de 65 ans si on sait qu'elle a voté pour le Brexit ?

b) On effectue un test χ^2 au seuil de signification α = 5%

6.3 Énoncer l'hypothèse H_0.

6.4 Énoncer l'hypothèse H_1.

6.5 Combien vaut la p-valeur ?

6.6 Conclure dans ce contexte.