EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024							
QUESTIONNAIRE							
Date :	**07.06.24**		*Horaire :*	**08:15 - 11:15**		*Durée :*	**180 minutes**
Discipline :	**MATHE**	*Type :*	**écrit**	*Section(s) :*	**GSN**		
					Numéro du candidat :		

Exercice 1 [5+7 = 12 points]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

a) $\dfrac{6e^{-x}-5}{2e^{x}-1}=1$

b) $\ln\left(\dfrac{1-2x}{4-x^2}\right)\leqslant 0$

Exercice 2 [3+4+2 = 9 points]

Soit f la fonction définie sur $D_f =]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{ex}$$

et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et interpréter graphiquement.

b) Établir le tableau de variation complet de f sur D_f.

c) Vrai ou faux ? Justifier.

« La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$ a pour équation $y=2ex-1$. »

Exercice 3 [1,5+1,5+4+(1+1) = 9 points]

On étudie la concentration d'alcool dans le sang de Monsieur Crémont après la consommation d'une certaine quantité d'alcool. Le taux d'alcoolémie dans son sang (exprimé en g/L) est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heures, par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(t) = kte^{-t}$$

où k est une constante réelle positive qui dépend de la masse de la personne et de la quantité d'alcool absorbée.

a) 30 minutes après la consommation d'alcool, le taux d'alcoolémie de Monsieur Crémont est de $0,607$ g/L. Vérifier algébriquement que $k \simeq 2$.

Dans la suite de l'exercice on utilisera la valeur $k = 2$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

c) Décrire les variations du taux d'alcoolémie de Monsieur Crémont après sa consommation d'alcool.

d) Le code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à $0,5$ g/L.

1) Monsieur Crémont a-t-il le droit de conduire à l'instant où son taux d'alcoolémie est maximal ? Justifier.
2) A-t-il le droit de conduire 2 heures et 15 minutes après sa consommation d'alcool ? Justifier.

Exercice 4 [1+(2+1) = 4 points]

a) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Déterminer les primitives F de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

b) 1) Démontrer que la fonction $G : x \to \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ est une primitive de la fonction

$g : x \to \dfrac{1}{x^2 + x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

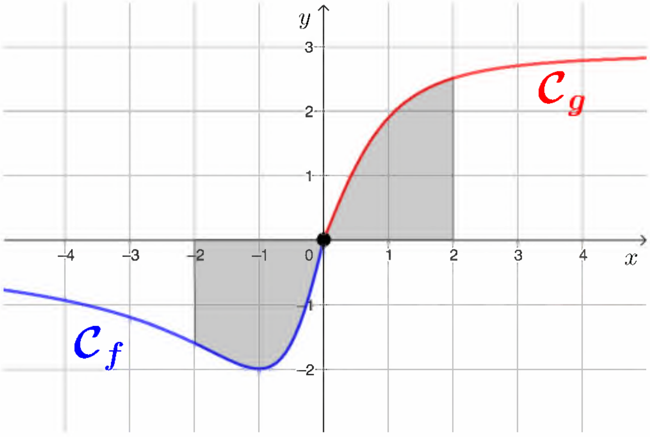
2) Déterminer la primitive G de la fonction g sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Exercice 5 [6 points]

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0]$ par $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{3x^2+4}}$ et soit $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

Calculer la valeur exacte de l'aire coloriée en gris, puis donner la valeur arrondie au centième de l'unité d'aire près.



Exercice 6 [3+(2+2)+3 = 10 points]

Vrai ou faux ? Justifier.

a) Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = 2x - \ln(2x-1)$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

« $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = 1$. »

b) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{1}{2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \dfrac{2}{3}$.

1) « La suite (v_n) est une suite géométrique. »

2) « $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3u_n = \dfrac{1}{4^n} + 2$. »

c) Soit (w_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \displaystyle\int_0^1 nx^n\,dx$.

« La suite (w_n) converge et a pour limite 0. »

Exercice 7 [2+2+2 = 6 points]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^2} & \text{si } x \in [1;2] \\ \\ 0 & \text{si } x \notin [1;2] \end{cases}$$

a) Déterminer le réel a pour que f soit la fonction densité d'une variable aléatoire X.

b) Calculer $P\left(0 \leqslant X \leqslant \dfrac{3}{2}\right)$.

c) Calculer l'espérance de X.

Exercice 8 [1+1+1+1 = 4 points]

Juliette et Boris se donnent rendez-vous dans un café entre 12h00 et 13h00.
Juliette arrive à 12h20. On suppose que la durée en minutes entre midi et l'heure d'arrivée de Boris est une variable aléatoire de densité f qui suit la loi uniforme sur $[0;60]$.
Pour les questions suivantes, donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier.

a) Calculer la probabilité que Boris arrive avant Juliette.

b) Calculer la probabilité que Juliette attende Boris plus de cinq minutes.

c) Calculer la probabilité que Boris arrive en même temps que Juliette.

d) Quel est le temps moyen d'attente pour Juliette ?