EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024 **QUESTIONNAIRE**							
Date :	24.10.24		*Horaire :*	08:15 - 10:15		*Durée :*	120 minutes
Discipline :	MATHE - MATH2	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	GIG / GIN		
					Numéro du candidat :		

Pour les questions 3 à 4, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Pour les questions 5 à 7, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Question 1 **(4 points)**

Démontrer le théorème suivant:

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z':

1) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$;
2) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad (mod\ 2\pi)$.

Question 2 **(2+2+3+2 = 9 points)**

On considère les nombres complexes

$$z_1 = \frac{(3-i)^2}{7+i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

1) Écrire z_1 sous forme algébrique.
2) Écrire $z_1$et z_2 sous forme exponentielle.
3) Exprimer $Z' = z_1 \cdot z_2$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
4) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$.

Question 3 **(3+2+2 = 7 points)**

On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = 4 - i\sqrt{2}\ ,\ \ z_B = -2 + i\sqrt{2}\ \text{ et }\ z_C = 1 - \sqrt{2} - 3i\ .$$

1) Déterminer par la **méthode géométrique** l'ensemble Δ des points $M(z)$ du plan dont l'affixe z vérifie
$$\left|\frac{-2-z+i\sqrt{2}}{\bar{z}-i\sqrt{2}-4}\right| = 1\ \text{, avec } \bar{z} \neq 4 + i\sqrt{2}.$$
2) Vérifier que C appartient à Δ et en déduire que le triangle ABC est isocèle en C.
3) Déterminer l'affixe du point D tel que $ACBD$ soit un losange.

Question 4 **(4 points)**

Représenter l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(z)$ du plan dont l'affixe z non nulle vérifie

$$\arg(2\bar{z}) = \arg(-z) \quad (mod\ 2\pi) \quad \underline{\textbf{et}} \quad \mathcal{Im}(z) > 0.$$

Question 5 **((2+3)+3 = 8 points)**

Les parties 1) et 2) sont indépendantes.

1) On considère les points $A(-4;\ -1;3)$, $B(0;\ -2;5)$ et $C(3;\ -2;-1)$.
   a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b) Déterminer la valeur exacte, en u.a., de l'aire du triangle ABC.

2) Vrai ou faux? Justifier la réponse.
   Les plans $P{:}4x - y + 3z + 1 = 0$ *et* $Q{:}4x - y - 3z + 2 = 0$ *sont sécants suivant la droite* d *définie par le point* $D\left(1;\frac{11}{2};\frac{1}{6}\right)$ *et par le vecteur directeur* $\vec{u}(-2;-8;1)$.

Question 6 **(6+4+1+2+3 = 16 points)**

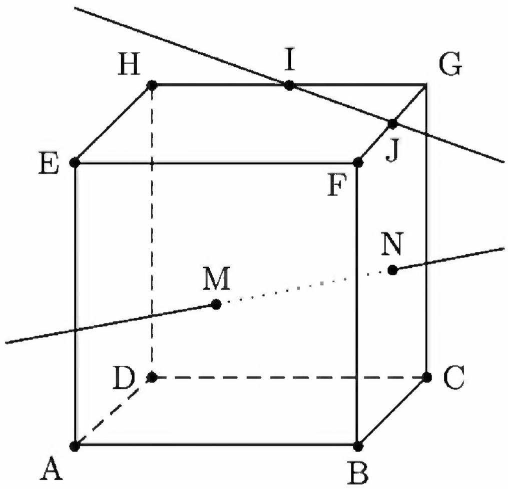
On considère les points $A(1;\ -3;2)$, $B(-1;-7;4)$ et $C(-6;3;-11)$

et la droite $d{:}\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 - t \\ z = 3t + 4 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1) Vérifier que les droites (AB) et d sont coplanaires non parallèles.
2) Soit P le plan contenant les droites (AB) et d. Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal au plan P et en déduire une équation cartésienne du plan P.
3) Vérifier que le point C n'appartient pas au plan P.
4) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par C et perpendiculaire à P.
5) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de C dans le plan P.

Question 7 **(3+3+3+3 = 12 points)**

Le figure ci-dessous représente un cube $ABCDEFGH$. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[GH]$ et $[FG]$. Les points N et M sont les centres respectifs des faces $ABFE$ et $BCGF$.



On choisit le repère orthonormé direct $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (IJ) et de la droite (MN).
2) Est-ce que les droites (IJ) et (MN) sont perpendiculaires ? Justifier !
3) Déterminer les coordonnées de P, point d'intersection de la droite (IJ) avec le plan $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE})$.
4) Soit θ la mesure de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{FM}$. Déterminer la valeur approchée de θ, arrondie au dixième de degré près.