EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024							
QUESTIONNAIRE							
Date :	07.06.24		*Horaire :*	08:15 - 10:15		*Durée :*	120 minutes
Discipline :	MATHE - MATH2	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	GIG		
					Numéro du candidat :		

Question 1 (5 points)

Démontrer le théorème suivant :

Si dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$ on a $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, alors les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sont $\;(yz'-zy';-(xz'-zx');xy'-yx')$.

Question 2 (3+3+3+3 = 12 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

a) Déterminer, **par la méthode géométrique**, l'ensemble $\mathcal{F}$ des points $M(z)$ tels que

$$|-3i+2-\bar{z}|=|iz-5|$$

b) Déterminer, **par la méthode analytique**, l'ensemble Ω des points $M(z)$ tels que

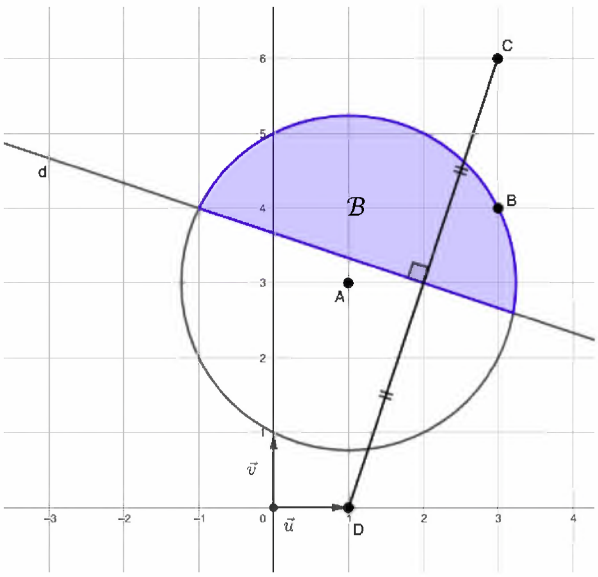
$$|2i-i\bar{z}+1|=|3+4i|$$

c) On donne l'ensemble $\mathcal{H}$ des points $M(z)$ d'affixe non nulle tels que

$$\arg\left(\frac{2\sqrt{3}i-2}{i\bar{z}}\right)=\frac{\pi}{12}\quad(mod\ \pi)$$

Déterminer $\arg(z)$.

d) Caractériser par une double condition sur son affixe z l'appartenance d'un point M à la région coloriée $\mathcal{B}$, frontières comprises.



Question 3 (5+2+1 = 8 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

On donne les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad z_2 = \frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{1+2i} \qquad z_3 = \overline{z_1}\cdot z_2$$

a) Écrire $z_1\,, z_2\ et\ z_3$ sous forme algébrique.
b) Écrire $z_2\ et\ z_3$ sous forme exponentielle.
c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\ et \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$.

Pour les questions 4 – 7, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\boldsymbol{O}\,;\vec{\boldsymbol{\imath}}\,,\vec{\boldsymbol{\jmath}}\,,\vec{\boldsymbol{k}}\right)$.

Question 4 (2+3+2+2+3 = 12 points)

Soient $A(3; -2\,; 1)$, $B\ (7; -4; 5)$ et $C(-2; 0; 3)$ trois points.

a) Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
b) Établir une équation cartésienne du plan (ABC).
c) Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
d) Calculer la valeur exacte en u.a. de l'aire du parallélogramme $ABCD$.
e) Calculer la valeur approchée de l'amplitude de l'angle $\widehat{BAC}$ à l'unité près.

Question 5 (6 points)

Soient $A(2\,; -4\,; 3)$ et $B(1\,; -1\,; 2)$ deux points.

Soit d: $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t - \frac{1}{2} \\ z = -3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ une représentation paramétrique de la droite d.

Les droites d et (AB) sont-elles coplanaires ? Justifier !

Question 6 (2+4+3 = 9 points)

On considère les trois plans :

$$P_1 : 3x - 4y + 5z - 1 = 0$$
$$P_2 :\ -2x + 7y + z = 0$$
$$P_3 : 13x - 26y + 13z - 3 = 0$$

a) Vérifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants (sans déterminer leur intersection).
b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, intersection des plans P_1 et P_2.
c) Étudier la position relative de cette droite d et du plan P_3 et en déduire l'intersection des trois plans.

Question 7 (1+5+2 = 8 points)

On donne le point $A(4\,;-3\,;1)$ et la droite d: $\begin{cases} x = -2t+1 \\ y = t-3 \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

a) Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite d.

b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur le plan P d'équation $x - 2y + z - 1 = 0$.

c) En déduire la valeur exacte de la distance du point A au plan P.