EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES – Sessions 2024 **QUESTIONNAIRE**							
Date :	22.05.24		*Horaire :*	08:15 - 11:15		*Durée :*	180 minutes
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques 1	*Type :*	écrit	*Section(s) :*	GIG / GIN		
					Numéro du candidat :		

Question 1 (4 + 5 = 9 points)

Démontrer les théorèmes suivants :

1) La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $(\ln)'(x)=\frac{1}{x}$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

Question 2 (3 + 3 = 6 points)

Un ballon d'eau chaude a une forme cylindrique et on note $h>0$ sa hauteur en décimètres et $r>0$ son rayon en décimètres. L'entreprise de fabrication cherche évidemment à minimiser les déperditions en chaleur. Le modèle de ballon d'eau chaude en question a un volume de $200\ L$ d'eau (afin de simplifier, on suppose que tout le ballon est rempli d'eau, on ignore donc l'épaisseur des parois).

Afin de limiter les déperditions en chaleur, il faut minimiser la surface des parois extérieures. Si on suppose que ce modèle de ballon d'eau chaude est posé par terre et que par conséquent il n'y a pas de déperdition de chaleur par le sol, il s'agit donc de minimiser la surface du couvercle augmentée de l'aire latérale du ballon tout en gardant le volume constant à $200\ L$.

1) Montrer que pour tout $r>0$, la surface à minimiser est donnée par : $S(r)=\pi r^2+\frac{400}{r}$.

2) Déterminer les dimensions du ballon d'eau chaude, au mm près, afin que la déperdition en chaleur soit minimale.

Question 3 (4 + 5 = 9 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\frac{e^x-1}{2}\geq e^{-x}$

2) $\ln(x^2-2)-\ln\sqrt{x^2-3}=\ln x$

Question 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{1-x}-x$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Combien y a-t-il de tangentes à C_f qui passent par le point $A(-2;0)$? Justifier la réponse.

Question 5 ((4 + 1) + (2 + 1 + 1 + 2) = 11 points)

a) Soit g la fonction définie par $g(x) = x(2\ln x - 1) + 2$.

1) Déterminer le tableau de variation complet de g.
2) En déduire le signe de g sur son domaine de définition.

b) Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2(\ln x - 1) + 2x - 3$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
2) Déterminer la dérivée de la fonction f et montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x appartenant au domaine de f.
3) Déduire de ce qui précède le tableau de variation complet de f.
4) En déduire, en justifiant la réponse, le nombre de solutions de l'équation $3 - 2x = x^2(\ln x - 1)$. Pour chacune des solutions éventuelles, donner un encadrement à 10^{-2} près.

Question 6 (3 points)

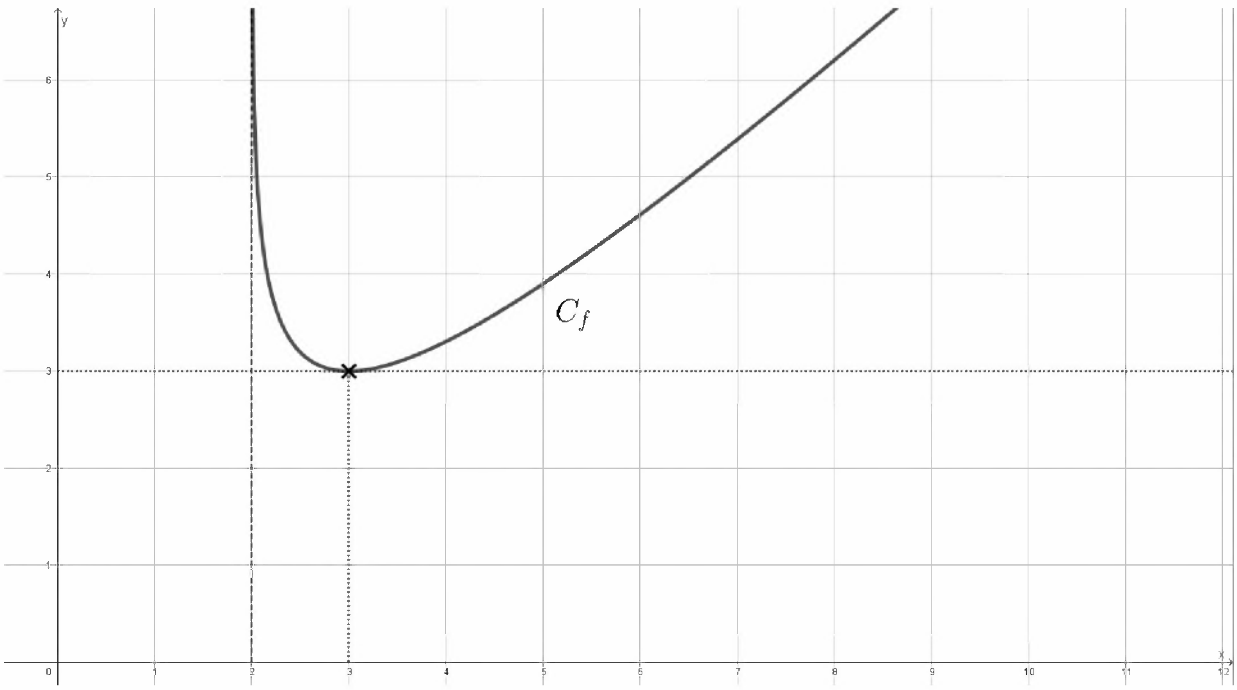
Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{a}\ln x + b + \frac{2}{x}$, avec a et b des réels.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Déterminer a et b sachant que C_f admet une tangente horizontale en $A(4; \ln 2)$.

Question 7 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $] - c; +\infty[$ par $f(x) = a\ln(x + c) + bx$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Déterminer a, b et c sachant que C_f vérifie les conditions données graphiquement.



Question 8 (2 + 2 + 1 = 5 points)

On considère les intégrales $I = \int_1^2 \sqrt{5x-1}\,dx$ et $J = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{5x-1}}dx$

1) Exprimer I en fonction de J.

2) Calculer $I - 5J$.

3) En déduire les valeurs de I et de J.

Question 9 (2 points)

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$.
Déterminer l'unique primitive F de f sur $]1; +\infty[$ qui s'annule en $x = e^{-e}$.

Question 10 (2 + 2 + 2 = 6 points)

Soit f la fonction définie sur $]-2\,; +\infty[$ par $f(x) = 2x\ln(x+2)$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \in]-2; +\infty[$: $\frac{x^2}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2}$
2) Calculer : $\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{x+2}dx$
3) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de l'aire de la surface coloriée.