EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES GÉNÉRALES **Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT**					
Date :	08.06.23	*Durée :*	8:15 - 10:15	*Numéro candidat :*	
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse	*Section(s) :*	GSO		

Sauf mention contraire, les résultats sont arrondis à trois chiffres significatifs.

<u>Question 1</u> (2 + (4+2,5) + (1 + 2 + 2 + 2,5 + 2,5) = 18,5 points)

1) Exprimer l'expression suivante sous la forme $\ln c$ où c est un nombre réel strictement positif.
   $A = 3\ln 2 + 2\ln 3$

2) Résoudre algébriquement l'équation et l'inéquation suivantes sur le domaine indiqué :

   a) $\ln(x+2) + \ln(x+1) = \ln 2$ $\qquad D =]-1; +\infty[$
   b) $e^{3x} > 5$ $\qquad D = \mathbb{R}$

3) *Dans cette partie de la question, les prix sont arrondis à l'euro et les quantités en litres.*

   Une entreprise vend x centaines de litres de parfum par jour avec $1{,}5 \leq x \leq 8$.
   Le bénéfice en milliers d'euros réalisé, par jour, par l'entreprise lorsqu'elle vend x centaines de litres de parfum est donné par la fonction $f(x) = (x-2) \cdot e^{-x+4}$.

   On suppose que pour des raisons techniques et commerciales l'entreprise vend au moins 150 litres et au maximum 800 litres de parfum par jour.

   a) Calculer $f(1{,}8)$ et interpréter le résultat.
   b) Combien de litres de parfum l'entreprise doit-elle vendre pour avoir un bénéfice maximal et que vaut alors ce bénéfice ?
   c) Combien de litres de parfum l'entreprise doit-elle vendre pour faire un bénéfice de 2000 € ?
   d) Déterminer le pourcentage entier d'évolution du bénéfice si l'entreprise vend entre 400 et 500 litres de parfum par jour.
   e) L'entreprise décide de fixer ses ventes à 350 litres par jour pendant le mois de janvier 2023. Calculer le bénéfice de janvier 2023 si on suppose que la vente a lieu pendant 23 jours.

<u>Question 2</u> ((1 + 1 + 1,5) + (2 + 1 + 2 + 2,5) = 11 points)

Le glacier d'Aletsch, classé à l'UNESCO, est le plus grand glacier des Alpes. Situé dans le sud de la Suisse, il alimente la vallée du Rhône.
Pour étudier le recul de ce glacier au fil des années, une première mesure a été effectuée en 1880 : ce glacier mesurait alors 25,6 km.
Des relevés ont été effectués tous les 20 ans : le recul du glacier est mesuré par rapport à la position où se trouvait initialement le pied du glacier en 1880. Les mesures successives ont été relevées dans le tableau ci-dessous. On note x la durée, en années, écoulée depuis 1880, et y le recul correspondant, mesuré en kilomètres.

Année de mesure	1900	1920	1940	1960	1980	2000	2020
Durée x_i écoulée (depuis 1880)	20	40	60	80	100	120	140
Recul y_i (en km)	0,2	0,45	0,8	1,2	1,7	2,3	3,3

Source : GLAMOS-Glacier Monitoring Switzerland (https://glamos.ch/factsheet#/B36-26)

Par exemple, en 1940, le recul du glacier par rapport à 1880 a été de 0,8 km. La longueur du glacier était donc de $25{,}6 - 0{,}8 = 24{,}8\ km$.

<u>Partie A</u>

1) Justifier qu'un ajustement affine est valable en utilisant le coefficient de corrélation.
2) Donner l'équation de la droite de régression de y en fonction de x.
3) A partir de quelle année le glacier aura-t-il reculé d'au moins 12,8 km ?

<u>Partie B</u>

On pose $z = \ln(y)$

4) Compléter le tableau suivant en écrivant les arrondis au centième.

Durée x_i écoulée (depuis 1880)	20	40	60	80	100	120	140
Recul y_i (en km)	0,2	0,45	0,8	1,2	1,7	2,3	3,3
$z_i = \ln(y_i)$							

5) Donner l'équation de la droite de régression de z en fonction de x.
6) En déduire un ajustement de y en fonction de x sous la forme $y = ke^{ax}$ (k et a étant des réels arrondis à 10^{-2})
7) A l'aide de ce nouveau modèle, estimer l'année à partir de laquelle le glacier a disparu complètement.

<u>Question 3</u> (2 + 1 + 1 + 2 + (2 + 1 + 2 + 1) = 12 points)

Paul se rend au travail en voiture. Son collègue Pierre ne possède pas de voiture. Ainsi, chaque matin, Paul propose à Pierre de l'emmener. Quelle que soit la réponse de Pierre, Paul lui propose de le ramener le soir.

On se place un jour donné et on dispose des informations suivantes :

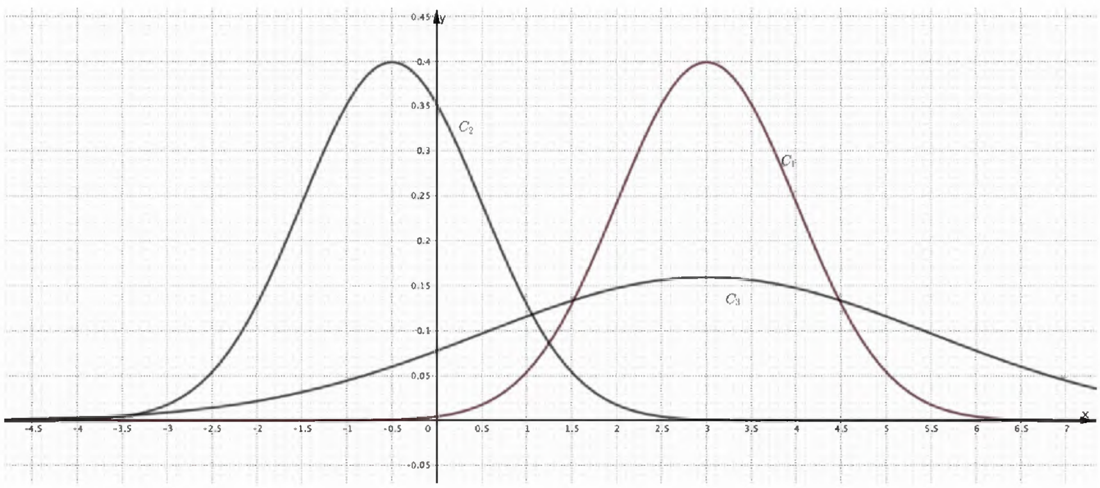
- la probabilité que Paul emmène Pierre le matin est 0,55 ;
- si Paul a emmené Pierre le matin, la probabilité qu'il le ramène le soir est 0,7 ;
- si Paul part seul le matin, il y a 24% de chance qu'il revienne avec Pierre.

On note les événements suivants :
- M : « Paul emmène Pierre le matin »
- S : « Paul ramène Pierre le soir »

1) Construire un arbre pondéré traduisant la situation
2) Calculer $P(M \cap S)$ et interpréter le résultat.
3) Démontrer que $P(S) = 0{,}493$.
4) Sachant que Paul ramène Pierre le soir, quelle est la probabilité que Paul l'ait emmené le matin ?
5) L'entreprise de Pierre affirme que 35 % de ses salariés pratiquent le covoiturage. On interroge au hasard un échantillon de 254 salariés et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de salariés qui pratiquent le covoiturage. On suppose que le nombre de salariés dans l'entreprise est suffisamment grand pour que ces choix soient assimilés à des tirages indépendants avec remise.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X et justifier.
   b) Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.
   c) Calculer l'intervalle de fluctuation à 95 % près du nombre de salariés qui pratiquent du covoiturage.
   d) Dans l'échantillon considéré, il y a 90 personnes qui pratiquent le covoiturage. L'affirmation de l'entreprise est-elle valable ?

<u>Question 4</u> (3 + (1 + 1 + 2) + (1 + 3,5) = 11,5 points)

1) Associer les distributions des lois normales $\mathcal{N}(3;1^2)$, $\mathcal{N}(3;2{,}5^2)$ et $\mathcal{N}(-0{,}5;1^2)$ aux trois courbes ci-dessous en justifiant :



2) Une enquête a été menée auprès de ménages de 4 personnes d’une ville A en vue de connaître leur consommation de lait pendant un mois.
On suppose que sur l’ensemble des personnes interrogées, la consommation, modélisée par une variable aléatoire X, suit une distribution normale de moyenne $\mu = 20\ l$ et d’écart-type $\sigma = 5\ l$. Dans le cadre d’une campagne publicitaire, on souhaite connaître certaines habitudes des habitants du pays.
Pour ce faire, calculer les probabilités suivantes :
   a) Quelle est la probabilité qu’un ménage soit considéré comme faible consommateur (moins de 10 litres par mois) ?
   b) Dans la famille de Paul, on boit 25 litres de lait par mois. Est-ce que cette famille fait partie des 10% de ménages "gros consommateurs" de lait ?
   c) Déterminer la consommation de litres de lait par mois, arrondie au dixième, au-delà de laquelle figurent 33% des ménages.
3) La même enquête a été menée auprès de ménages de 4 personnes dans une ville B. Dans ce cas, la consommation de lait peut être modélisée par une variable aléatoire Y qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 17{,}5\ l$ et d’écart-type $\sigma\ l$.
On sait que $P(14 < Y < 21) = 0{,}76$
On note Z la variable aléatoire égale à $\frac{Y - 17{,}5}{\sigma}$.
   a) Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?
   b) Déterminer une valeur approchée à l’unité de l’écart-type de la variable aléatoire Y.

<u>Question 5</u> (1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 7 points)

Pour étudier un lien éventuel entre la consommation du type de bière et le genre d’une personne dans une certaine population, une brasserie a ordonné une enquête dans un échantillon représentatif de cette population. La brasserie produit des bières du type : blonde, blanche et brune.

Les données récoltées sont regroupées dans le tableau suivant :

	Blonde (B)	**Blanche (C)**	**Brune (D)**	**Total**
Homme (H)	20		20	80
Femme (F)		30	10	
Total				150

1) Compléter le tableau ci-dessus.
2) Énoncer l’hypothèse H_0.
3) Énoncer l’hypothèse H_1.
4) On réalise le test du χ^2 au seuil de signification $\alpha = 5$ %. Combien vaut la p-valeur ?
5) Conclure dans le contexte de la question.
6) On choisit une personne au hasard dans l’échantillon ci-dessus.
   Calculer la probabilité que cette personne préfère la bière blanche sachant que la personne choisie est une femme.