EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES GÉNÉRALES

Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT

Date :	08.06.23	Durée :	08:15 - 11:15	Numéro candidat :	
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse	Section(s) :	GSN		

Exercice 1 [6 points]

Résolvez l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$\left(e^{12x^2} - e^{x+6}\right)\left(e^x - 5 + \frac{6}{e^x}\right) = 0$$

Exercice 2 $[1 + 3 + 2 + 3 + 2 + 2 + (2 + 1{,}5 + 1{,}5) = 18$ points]

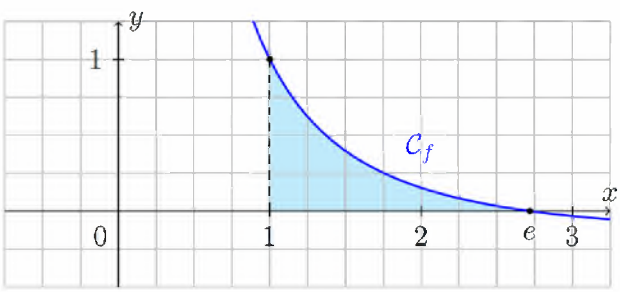
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot [1 - \ln(x)]$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de cette fonction f.

1) Déterminez le domaine de définition D_f de f.
2) Calculez les limites de f aux bornes de D_f et interprétez graphiquement.
3) Déterminez $f'(x)$.
4) Établissez le tableau de variations complet de la fonction f.
5) Calculez les coordonnées des points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
6) Déterminez l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par le point d'abscisse 1.
7) On note F_C les primitives de f sur D_f.
   a. Déterminez ces primitives F_C de f.
   b. Déterminez la primitive F qui s'annule en $x_0 = e^4$.
   c. Le graphique ci-dessous montre une partie de la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.

      Calculez l'aire du domaine colorié, délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.



Exercice 3 **[$(1+3+1+2)+(1+2)=10$ points]**

1) On appelle magnitude apparente m d'une étoile le nombre

$$m = -2{,}5 \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

où E est l'éclat de l'étoile exprimé en Jansky et où E_0 est l'éclat de Véga aussi en Jansky, choisie comme étoile de référence, avec $E > 0$ et $E_0 > 0$.

a. Quelle est la magnitude apparente m_0 de Véga sachant que dans ce cas $E = E_0$.

b. Sachant qu'une étoile a une magnitude apparente m négative, comparez son éclat E avec l'éclat E_0 de Véga. Interprétez le résultat obtenu dans le contexte.

c. L'étoile la plus brillante (après le Soleil) est Sirius, dont l'éclat est $3{,}9$ fois plus grand que celui de Véga. Calculez la magnitude apparente de Sirius.

d. Le Soleil a une magnitude apparente de $-26{,}7$.

Calculez le rapport $\frac{E}{E_0}$ et interprétez le résultat dans le contexte.

2) On appelle magnitude limite visuelle la plus faible luminosité dans la bande visible. Elle est donnée par la formule :

$$m_L = 2 + 5\log(D)$$

où D est le diamètre d'ouverture de l'instrument exprimé en millimètre.

a. L'œil humain a en moyenne un diamètre d'ouverture égal à 6 mm.

Calculez la magnitude limite visuelle (arrondie à l'unité) de l'œil humain.

b. Une paire de jumelles a une magnitude limite visuelle de 10.

Calculez le diamètre d'ouverture (arrondi à l'unité) de ces jumelles.

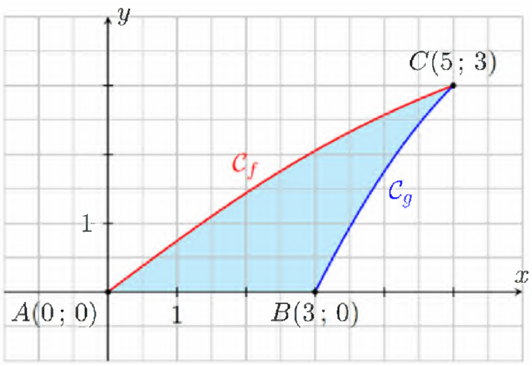
Exercice 4 **[5 points]**

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{15x}{\sqrt{9x^2+400}} \qquad \text{et} \qquad g(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 14x + 33)$$

On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives respectives des fonctions f et g.

Utilisez les informations du graphique pour calculer l'aire du domaine colorié, délimité par C_f, C_g et l'axe des abscisses.



Exercice 5 **$[(2{,}5 + 2{,}5) + 4 + (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 14$ points]**

Dans cet exercice, les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Dans un centre de collecte de sang, on commence par mesurer la température corporelle et la pression artérielle des personnes qui se présentent pour un don.

On admet que pour une personne prise au hasard parmi celles qui se présentent :

- la température corporelle T (en °C) suit une loi normale d'espérance 37 et d'écart-type $0{,}4$;
- la pression artérielle systolique S (en cm Hg) suit une loi normale d'espérance 12 et d'écart-type 2.

1) On note F l'événement « La personne a de la fièvre », c'est-à-dire que sa température dépasse $37{,}8$ °C.
   Calculez la probabilité de F.
2) On note H l'événement « La personne est hypotendue », c'est-à-dire que sa pression artérielle systolique est inférieure à 9 cm Hg.
   Calculez la probabilité de H.

Partie B

Le nombre Y de globules rouges par mm³ de sang suit une loi normale d'espérance $\mu = 4{,}5 \cdot 10^6$. La probabilité que Y soit comprise entre $4 \cdot 10^6$ et $5 \cdot 10^6$ est égale à $0{,}95$.

Calculez la valeur de l'écart-type σ arrondie au millier près.

Partie C

Le temps d'attente (en min) au centre de collecte de sang peut être modélisé par une variable aléatoire Z qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[5\,;45]$.

1) Donnez la fonction densité f de la loi suivie par Z.
2) Déterminez la probabilité (sous la forme d'une fraction irréductible) que le temps d'attente soit
   a. compris entre 10 min et 40 min ;
   b. inférieur ou égal à 30 min ;
   c. au moins égal à 15 min.
3) Quel est le temps d'attente moyen ?

Exercice 6 [3 + 2 + 2 = 7 points]

QCM : Dans chaque cas, déterminez la bonne réponse en justifiant votre raisonnement.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [2\,;t] \\ 0 & \text{si } x \notin [2\,;t] \end{cases}$$

où t est un nombre réel tel que $t > 2$.

1) La fonction f est la fonction densité d'une variable aléatoire X, si

a. $t = \dfrac{2}{3}$ b. $t = e$ c. $t = 5{,}4$ d. $t = 2e$

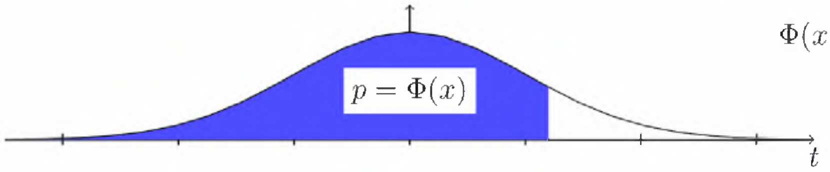
2) La probabilité que X soit comprise entre e et $2e$ est égale à

a. $-\dfrac{1}{2e}$ b. $\dfrac{1}{2}$ c. $\ln(2)$ d. $0{,}69$

3) L'espérance de X est égale à :

a. $2e - 2$ b. $e - 2$ c. $-\dfrac{4}{3}$ d. 1

Fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$



$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \varphi(t)\,dt$$

$$\text{où } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

x	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

x	**3,0**	**3,1**	**3,2**	**3,3**	**3,4**	**3,5**	**3,6**	**3,7**	**3,8**	**3,9**
$\Phi(x)$	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,000

Quelques valeurs de Φ^{-1} :

p	0,9500	0,9750	0,9900	0,9950	0,9990	0,9995
$x = \Phi^{-1}(p)$	1,6449	1,9600	2,3263	2,5758	3,0902	3,2905