

EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES GÉNÉRALES
Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT

Date :	15.09.23	Durée :	08:15 - 11:15	Numéro candidat :	
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques-Analyse		Section(s) :	GA3D	

Question 1

[1+2+4 = 7 points]



Une entreprise produit des gouttières en utilisant des feuilles de zinc de 4 m de long et de 12 cm de large. La production se fait en pliant deux côtés et en les relevant perpendiculairement à la feuille.

On note h la longueur, exprimée en m, d'un côté, et $V(h)$ le volume de la gouttière en fonction de h .

(On ne tiendra pas compte de l'épaisseur de la feuille de zinc).

- A quel intervalle doit appartenir h (en m) pour que la figure ait un sens ?
- Montrer que :

$$V(h) = 0,48h - 8h^2$$

- Quelle hauteur doivent avoir les côtés relevés pour que la gouttière ait une contenance maximale ?

Question 2

[4+4 = 8 points]

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$e^{3x} + 15e^{-x} = 8e^x$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\ln(x+2) - \ln 3 \geq \ln(3x+2) - \ln(x+4)$$

Question 3**[1+4+3+3+3+3 = 17 points]**

On donne la fonction

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

- a) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f .
- b) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition. Interpréter graphiquement.
- c) Montrer que la fonction dérivée f' est donnée par l'expression $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
- d) Étudier les variations de la fonction f sur D_f .
- e) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique $\alpha \in [0; 1]$. Donner un encadrement à 0,01 près de α
- f) Établir l'équation de la droite t , tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x_0 = \ln 2$.

Question 4**[3+4+2+3 = 12 points]**PARTIE 1 : Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \int_2^3 (4x - 2)(x^2 - x + 1) dx$

b) $J = \int_1^2 (x^2 - 1) \cdot \ln(2x) dx$

PARTIE II :

On donne
$$f(x) = \frac{e^{2x} + 4e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$$

c) Montrer que $f(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$.

d) En déduire $\int_0^1 f(x) dx$

Question 5**[6 points]**

Résoudre le système suivant par une méthode au choix. Donner ensuite une interprétation géométrique du résultat.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z - 1 = 0 \\ x - 3y + z + 6 = 0 \\ -3x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

Question 6**[3+1+3+3 = 10 points]**

On donne les plans

$$\pi_1 : x + y + z + 2 = 0$$

$$\pi_2 : 2x + 3y + z + 8 = 0$$

- a) Donner une représentation paramétrique de la droite d , intersection des plans π_1 et π_2 .
- b) Préciser un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d .
- c) Établir une équation cartésienne du plan π_3 passant par le point $A(1;4;2)$ et de vecteur normal $\vec{u}$.
- d) Déterminer l'intersection de la droite d et du plan π_3 .