EXAMEN DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES GÉNÉRALES **Sessions 2023 – QUESTIONNAIRE ÉCRIT**					
Date :	08.06.23	*Durée :*	08:15 - 10:15	*Numéro candidat :*	
Discipline :	Mathématiques - Mathématiques 2	*Section(s) :*	GIN		

Partie 1 – Combinatoire et Probabilités

Exercice 1

2+2+1 = 5 points

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : 6 boules vertes, 4 boules oranges et 2 boules rouges. On tire au hasard et simultanément quatre boules.

Calculer les probabilités des événements suivants en donnant les probabilités sous forme de fractions irréductibles :

A : « les boules ont la même couleur » ;
B : « trois boules sont vertes et une boule est rouge » ;
C : « les boules sont toutes de couleurs différentes ».

Exercice 2

3+3+1 = 7 points

Dans une cantine, neuf élèves dont 6 filles forment une file d'attente.
Calculer les probabilités des événements suivants en donnant les probabilités sous forme de fractions irréductibles :

D : « les trois garçons se trouvent l'un derrière l'autre » ;
E : « chaque garçon est suivi de deux filles ».

En déduire la probabilité qu'au moins un garçon n'est pas suivi de deux filles.

Exercice 3

3 points

Un site internet demande à ses utilisateurs de créer un mot de passe pour leur compte. Ce mot de passe doit être composé d'exactement deux lettres majuscules suivies de quatre chiffres distincts. Une personne malhonnête essaie d'accéder un compte en entrant le mot de passe $XY4578$.

Calculer la probabilité d'avoir trouvé le bon code au premier essai en donnant la probabilité sous forme de fraction irréductible.

Exercice 4

5 points

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation suivante après avoir donné les conditions d'existence :

$$9C_n^2 - 5C_{n+1}^2 - 4 = 0.$$

Partie 2 – Matrices

Exercice 5

1+2 = 3 points

Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Est-ce que la somme $N + M$ est définie ? Si oui, calculer la. Si non, justifier.
2. Est-ce que le produit $N \cdot M$ est défini ? Si oui, calculer le. Si non, justifier.

Exercice 6

2+3 = 5 points

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -2a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en fonction du paramètre réel a.

1. Déterminer pour quelles valeurs de a la matrice A est inversible.
2. Déterminer la matrice inverse A^{-1} en fonction de a.

Exercice 7

1+5 = 6 points

Soit le système d'équations suivant :

$$(S): \begin{cases} 5y = 4 - 2x + z \\ 2z - 3 = x - 4y \\ 4x + 6z - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer l'écriture matricielle de ce système.
2. En déduire les solutions du système (S).

Exercice 8

1+5 = 6 points

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & -4n \\ n & 1-2n \end{pmatrix}.$$

Partie 3 – Géométrie dans l’espace

Exercice 9

4 points

Démontrer le théorème suivant :

« On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l’espace et on considère un vecteur non nul $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ normal à un plan $\mathcal{P}$.

Une équation de $\mathcal{P}$ est alors de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$. »

Exercice 10

2+2+2+1+3 = 10 points

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(1;-2;5)$, $B\left(\frac{1}{2};-1;4\right)$, $C\left(3;\frac{1}{4};2\right)$.

1. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 6 \\ 28 \\ 25 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
3. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
4. Déterminer les coordonnées d’un point D qui appartient à (ABC) et qui a pour ordonnée 0.
5. Déterminer les coordonnées du point d’intersection I du plan (ABC) avec la droite

$$d: \begin{cases} x = \dfrac{5}{2}t + \dfrac{3}{2} \\ y = 1 - t \\ z = -2t - 1 \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11

6 points

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $D(1;4;1)$ et $E(4;0;2)$ et une droite

$$\Delta: \begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = -4t - 3 \\ z = t - 1 \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Établir une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ parallèle à Δ et passant par les points D et E.