Corrigé modèle

Question 1 (8 points)

$$\begin{cases} 5x - y = 3 + 2z \\ \dfrac{3x-2}{4} - \dfrac{2y-1}{2} + \dfrac{z}{3} = 5 \\ 7(x-3) - 3(y-x) = 4(z-1) - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y - 2z = 3 & (1) \\ 9x - 12y + 4z = 60 & (2) \\ 10x - 3y - 4z = 7 & (3) \end{cases}$$

$(1): y = 5x - 2z - 3 \quad (1')$

$(1')\ dans\ (2): -51x + 28z = 24 \quad (2')$

$(1')\ dans\ (3): -5x + 2z = -2 \Leftrightarrow z = -1 + \frac{5}{2}x \quad (3')$

$(3')\ dans\ (2'): x = \frac{52}{19}\ (4)$

$(4)\ dans\ (3'):\ z = \frac{111}{19} \quad (5)$

$(4), (5)\ dans\ (1'): y = -1$

$S = \left\{\left(\frac{52}{19}; -1; \frac{111}{19}\right)\right\}$

Question 2 (12 points)

Soit x le nombre de gâteaux de type anniversaire et y le nombre de gâteaux de type mariage.

Systèmes d'inéquations: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ y \geq 0 \\ \frac{1}{2}x + y \leq 8 \\ 3x + 2y \leq 24 \end{cases}$

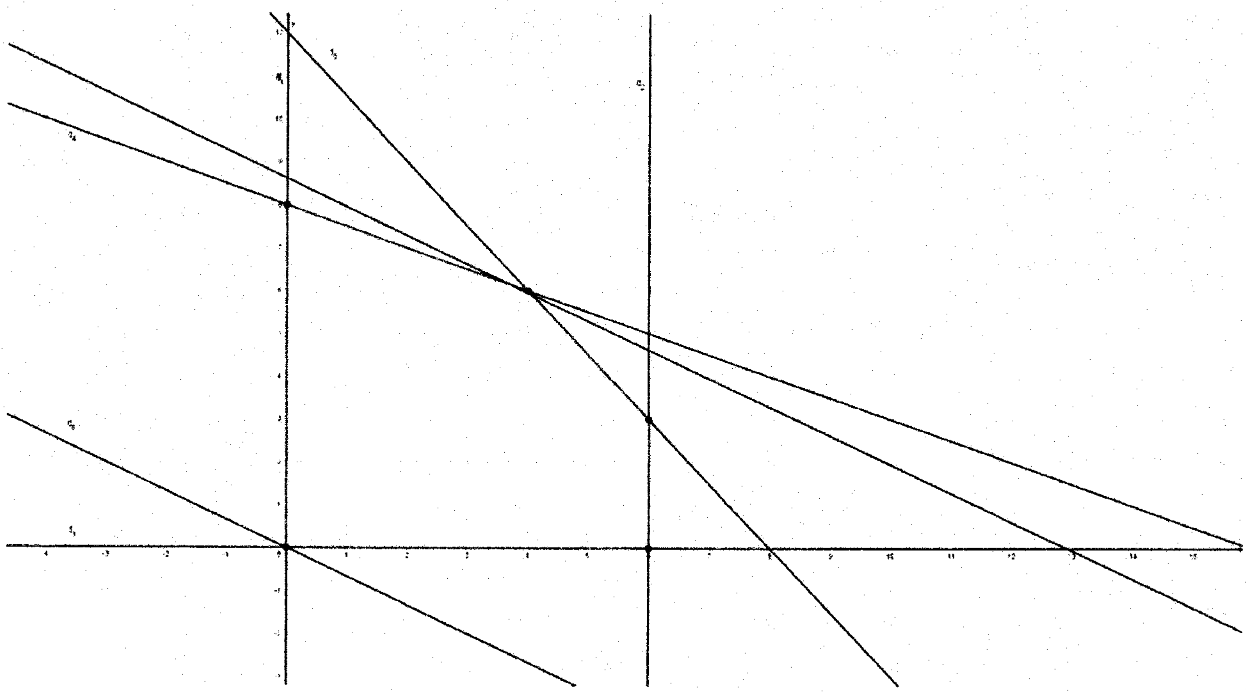
On trace les droites suivantes dans un repère :

$d_1 \equiv x = 0 \quad d_2 \equiv x = 6 \quad d_3 \equiv y = 0 \qquad d_4 \equiv \frac{1}{2}x + y = 8 \Leftrightarrow d_4 \equiv\ y = -\frac{1}{2}x + 8$

$d_5 \equiv 3x + 2y = 24 \Leftrightarrow d_5 \equiv\ y = -\frac{3}{2}x + 12$

Test pour $A(1; 1)$:

$0 \leq 1\ \ vrai \qquad 1 \leq 6\ \ vrai \qquad \frac{1}{2} + 1 \leq 8\ \ vrai \qquad 3 + 2 \leq 24\ \ vrai$



Bénéfice: $B(x;y) = 12x + 18y$

Droite de départ: $d_0 \equiv 12x + 18y = 0 \Leftrightarrow d_0 \equiv y = -\frac{2}{3}x$

Sur le graphique, on voit que le bénéfice est maximal pour $C(4;6)$.

Vérification par calcul : $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 8 & (1') \\ y = -\frac{3}{2}x + 12 & (2') \end{cases}$

$(1')$ dans $(2')$: $-\frac{1}{2}x + 8 = -\frac{3}{2}x + 12 \Leftrightarrow x = 4$

Dans $(2')$: $y = -\frac{3}{2} \cdot 4 + 12 = 6$

Le bénéfice est donc maximal si le pâtissier réalise 4 gâteaux d'anniversaire et 6 gâteaux de mariage.

$$12 \cdot 4 + 18 \cdot 6 = 48 + 108 = 156$$

Le bénéfice maximal s'élève à 156€.

<u>Question 3</u> (4+3=7 points)

a) $1 - 5 \cdot 3^{2x+1} = 5 - 7 \cdot 3^{2x+1}$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{2x+1} = 4$

$\Leftrightarrow 3^{2x+1} = 2$

$\Leftrightarrow 3^{2x+1} = 3^{\log_3 2}$

$\Leftrightarrow 2x + 1 = \log_3 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(\log_3 2 - 1)$ $\qquad\qquad S = \left\{\frac{1}{2}(\log_3 2 - 1)\right\}$

b) $7 - 3\log_5(6 - x) = -2$

$\Leftrightarrow -3\log_5(6 - x) = -9$

$\Leftrightarrow \log_5(6 - x) = 3$

$\Leftrightarrow \log_5(6 - x) = \log_5 5^3$

$\Leftrightarrow 6 - x = 125$

$\Leftrightarrow x = -119$ $\qquad\qquad S = \{-119\}$

<u>Question 4</u> (4+3+2=9 points)

a) $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 24x + 5$

$f'(x) = -4x^2 - 4x + 24$

Racines de f' $\qquad \Delta = 16 + 384 = 400 \quad x_1 = \frac{4+20}{-8} = -3 \quad x_2 = \frac{4-20}{-8} = 2$

Tableau de variation

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-49 min	$\nearrow$	max $\frac{103}{3}$	$\nearrow$	

b) $f''(x) = -8x - 4$

Racine de f'' $\qquad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Tableau de concavité

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
C_f		$\cup$	$-\frac{22}{3}$ P.I.	$\cap$	

c) $t_1 \equiv y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ $\qquad$ avec $\quad f(1) = \frac{77}{3}$ et $f'(1) = 16$

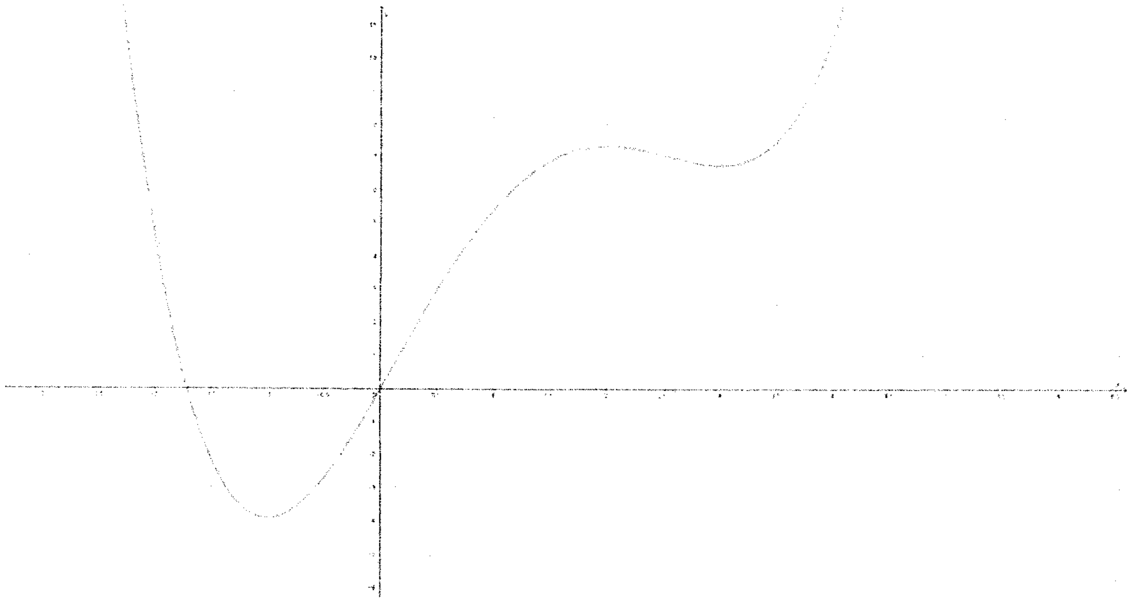
Donc $t_1 \equiv y = 16x + \frac{29}{3}$

<u>Question 5</u> (3+4=7 points)

a) Tableau de variation

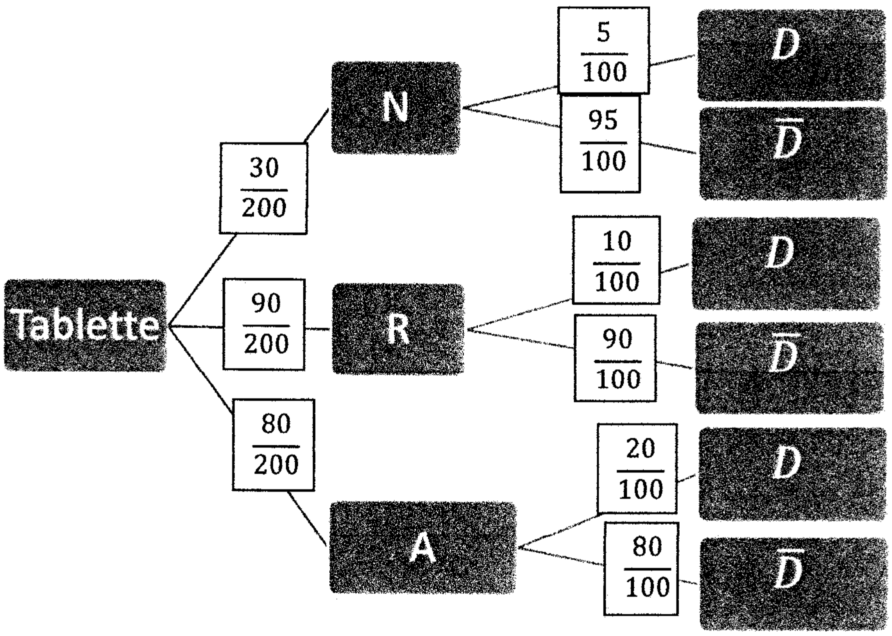
x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

b) Représentation graphique



<u>Question 6</u> (4+1+1+2=8 points)

a)



b) $p(tablette\ ancienne) = \frac{80}{200} = \frac{2}{5}$

c) $p(tablette\ neuve\ et\ défaillante) = \frac{30}{200} \cdot \frac{5}{100} = \frac{3}{400}$

d) $p(tablette\ défaillante) = \frac{30}{200} \cdot \frac{5}{100} + \frac{90}{200} \cdot \frac{10}{100} + \frac{80}{200} \cdot \frac{20}{100} = \frac{53}{400}$

<u>Question 7</u> (2+(1+2+2)+2=9 points)

a) $p(1\ jeton\ de\ chaque\ couleur) = \frac{C_1^1 \cdot C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_5^1}{C_{15}^5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3003} = \frac{40}{1001}$

b) 1) $p(VVV) = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{15 \cdot 15 \cdot 15} = \frac{1}{27}$

2) $p(JRR) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 3}{15 \cdot 15 \cdot 15} = \frac{4}{375}$

3) $p(BBB, NNN, RRR, JJJ, VVV) = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 \cdot 5}{15 \cdot 15 \cdot 15} = \frac{224}{3375}$

c) $p(au\ moins\ 1\ rouge) = 1 - p(aucun\ rouge) = 1 - \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{15 \cdot 14 \cdot 13} = 1 - \frac{44}{91} = \frac{47}{91}$
